الجُمْهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة
وزارة التّربيَة

الرّياضيّات

(الإحصاء و الاحتمال)

كتاب الطالب

الصَّفُ الثّاني الثّانوي الأدبيّ

مرحلةُ التَّعليمِ الثّانوي

المؤسّسة العامة للطباعة
2021 - 2022 م
1442هـ

طُبِع للمرّة الأولى للعام الدراسي 2012–2013 م

حقوقُ التّأليف والنشر محفوظة

لوزارة التّربية في الجمهوريّة العربيّة السوريّة

تأليف

فئة من المختصّين

المقدّمـــة

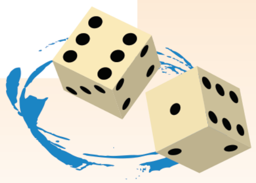
نهضت وزارة التربية في الجمهوريّة العربيّة السوريّة بمشروع وطنيٍّ لتطوير المناهج وبنائها على أساس مفهوم جديد يسمّى المستويات التربويّة، والمعايير الوطنيّة بما ينسجم مع التطور المتسارع في ميادين المعرفة، وذلك بغية تطوير التعليم والتميّز في التحصيل العلمي.

ولقد جرى تأليف هذا الكتاب (الجبر للصفّ الثّاني الثّانوي الأدبي) اعتماداً على هذه المعايير، وانسجاماً مع منهاج الرّياضيّات في الصّف العاشر.ومع الأهداف العامّة لتدريس الرّياضيّات.

وقد راعى الكتاب تنمية الفكر التّحليلي والتركيبيّ لدى الطالب وتنمية مهارات التفكير العليا من خلال اعتماد الترابط المنطقيّ للمفاهيم والبراهين. والتبسيط قدر الإمكان، والتدرّج في عرض الأفكار النظريّة و دعمها بالأمثلة والأنشطة والتدريبات والتمرينات المتنوّعة والشاملة.

كما راعى أن يكون الطّالب المحور الأساسيّ في عمليّة التعلّم، وربط الحقائق والمفاهيم التي يدرسها بحياته اليوميّة وبالعلوم الأخرى ما أمكن.

ويهدف الكتاب إلى تنمية قدرات الطلاب الذهنيّة والعمليّة على حلّ المسائل باستخدام التفكير الناقد من خلال الفهم والاستيعاب وصياغة الفرضيّات، واعتماد المُسلّمات في الوصول إلى النتائج وتقويمها واتّخاذ القرارات المناسبة.



و قد تمّت الاستفادة من برامج الحاسوب المختلفة في إنشاء الرّسوم والمخطّطات والخطوط البيانيّة والصور في هذا الكتاب، ومن هذه البرامج (*GEOPLANW – Cabri 3D – Google SketchUp 7 – Mathematica 7.0 – MathType*).

نأمل من زملائنا المدرّسين أن يزوّدونا بملاحظاتهم الميدانيّة ومقترحاتهم البنّاءة، متعاونين معاً لتطوير الكتاب المدرسي باستمرار، و مسهمين جميعاً في خدمة الوطن الغالي من أجل تقدّمه وازدهاره.

المؤلّفون

الفهـــرس

رقم الوحدة	الموضـــوع	الصفحة	
1.	**الوحدة الأولى** التحليل التوافقيّ – نظريّة ذي الحدّين	8	26
2.	**الوحدة الثانية** الاحتمال	28	44
3.	**الوحدةُ الثالثة** الإحصاء	46	68

1

التحليلُ التوافقيّ

نظريّةُ ذي الحدّين

التحليل التوافقي

سوف تتعلم:

1) المبدأ الأساسي في العدّ .
2) التراتيب.
3) التّوافيق.

تمهيد:

نحن نعلم كيف نعُدُّ عناصر مجموعة بالطّريقة المباشرة، لكنْ هناك أساليبُ أخرى من طرائق العدّ نحدّد لها عددَ عناصر مجموعة أو عدد نواتج تجربة معيّنة، وهذا ما نسمّيه بالتحليل التوافقي (طرائق العدّ) .

① المبدأ الأساسيّ في العدّ:

مثال تمهيدي1:

في إحدى المدارس 20 مدرِّساً، تُريد نقابة المعلّمين تشكيل وحدة نقابيّة من ثلاثة منهم (أمين وحدة، نائب أمين الوحدة، أمين سرّ الوحدة)، بكم طريقةٍ يمكن تشكيلُ هذه الوحدة؟

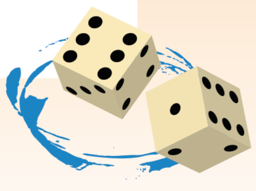
الحلّ:

تُشكّلُ الوحدةُ وفق المراحل الآتية:

يمكنُ اختيار أمين الوحدة بـ 20 طريقةً مختلفة، وبعد ذلك يمكنُ اختيار نائب أمين الوحدة بـ 19 طريقةً مختلفةً توافق كلّ طريقةٍ من طرائق اختيار أمين الوحدة.

وأخيراً يمكن اختيار أمين السرّ بـ 18 طريقةً مختلفةً توافق كلّ طريقةٍ من طرائق اختيار أمين الوحدة ونائبه، فيكون عدد طرائق تشكيل الوحدة النقابيّة مساوياً : $20\times19\times18=6840$.

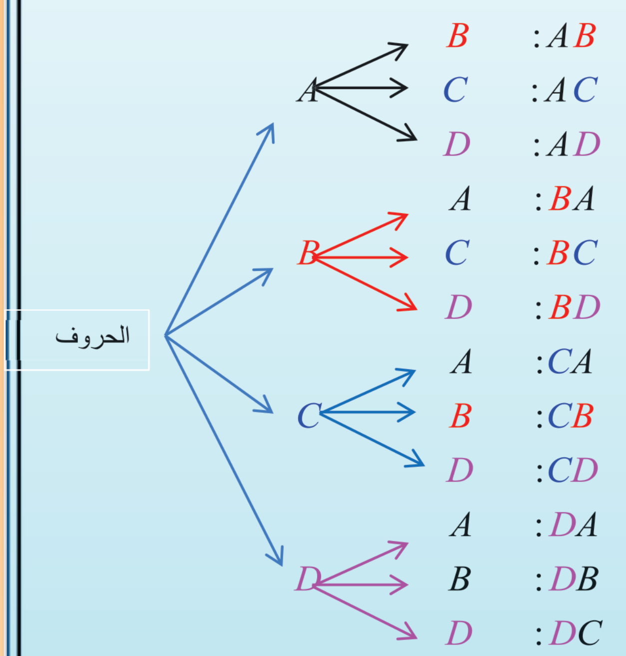
مثال تمهيدي2: لتكنْ مجموعة الحروف $X=\{A,B,C,D\}$، ما عددُ الكلمات المؤلّفة من حرفين مختلفين من أحرف هذه المجموعة، وباستطاعتكَ تأليفُها ؟



الحلّ:

يمكن اختيارُ الحرفِ الأوّل بـ 4 طرائقَ مختلفةٍ، يقابل كلّاً منها 3 طرائقَ مختلفةٍ لاختيار الحرف الثّاني ، فيكون عدد الكلمات: $4 \times 3 = 12$.

لاحظ: عندما يكون عددُ النواتج صغيراً (كما في المثال التمهيديّ2) يمكن أن تساعدَنا طريقةُ الجدول أو طريقة الشّجرة البيانيّة في توضيح الحلّ:



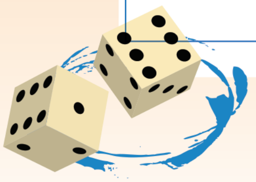
الشّجرة البيانية

	A	B	C	D
A	≋	AB	AC	AD
B	BA	≋	BC	BD
C	CA	CB	≋	CD
D	DA	DB	DC	≋

الجدول

تعريف1: المبدأ الأساسيّ في العدّ:

إذا كانت العمليّة p تُنجزُ بـ n مرحلة متتالية $S_1 , S_2 , \cdots\cdots , S_n$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ حيث: يمكن أن تُنجزَ المرحلة S_1 بـ r_1 طريقة مختلفة، ويمكن أن تُنجزَ المرحلة S_2 بـ r_2 طريقة مختلفة مقابلَ كلّ طريقة من طرائق إنجاز المرحلة S_1 ، وهكذا ....، ويمكن أن تُنجزَ المرحلة S_n بـ r_n طريقة مختلفة مقابل كلّ طريقة من طرائق إنجاز المراحل السّابقة جميعها، فيكون عددُ طرائق إنجاز العملية p مساوياً $r_1 \times r_2 \times \cdots\cdots \times r_n$ ، وهذا ما يُسمّى بالمبدأ الأساسيّ في العدّ.



مثال: لتكنْ مجموعةُ الأرقام: $A=\{2,3,4,6,9\}$. والمطلوب:

1) كم عدداً مؤلّفاً من رقمين مختلفين يمكن تشكيلُه من هذه الأرقام ؟
2) كم عدداً مؤلّفاً من رقمين يمكنُ تشكيله من هذه الأرقام ؟
3) كم عدداً مؤلّفاً من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تشكيلُه من هذه الأرقام ؟
4) كم عدداً مؤلّفاً من ثلاثة أرقامٍ مختلفة وأصغر من 500 يمكن تشكيلُه من هذه الأرقام ؟

الحلّ:

1) يمكنُ اختيار رقم الآحاد بـ 5 طرائقَ مختلفةٍ.
ويمكنُ اختيار رقم العشرات بـ 4 طرائق مختلفة تقابل كلّ اختيارٍ لرقم الآحاد.
فيكون عدد الأعداد مساوياً: $5\times4=20$

2) هنا لا نفترض اختلافَ الرقمين إذن:
يمكن اختيار رقم الآحاد بـ 5 طرائق مختلفة، ويمكن اختيار رقم العشرات بـ 5 طرائق مختلفة أيضاً، تقابل كلّ طريقة من طرائقِ اختيار الآحاد، فيكون عدد الأعداد: $5\times5=25$

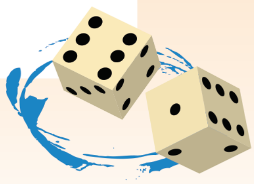
3) يمكنُ اختيار رقم الآحاد بـ 5 طرائقَ مختلفةٍ، ويمكنُ اختيار رقم العشرات بـ 4 طرائقَ مختلفةٍ تقابل كلّ طريقة من طرائق اختيار الآحاد، ويمكنُ اختيار رقم المئات بـ 3 طرائقَ مختلفةٍ تقابل كلّ طريقة من طرائق اختيار الآحاد والعشرات.
فيكون عدد الأعداد $5\times4\times3=60$

4) يمكن اختيار رقم المئات بـ 3 طرائق مختلفة، ويمكن اختيار رقم العشرات بـ 4 طرائق مختلفة تقابل كلّ طريقةٍ من طرائقِ اختيار المئات، ويمكن اختيار رقم الآحاد بـ 3 طرائقَ مختلفة تقابل كلّ طريقةٍ من طرائقِ اختيار المئات والعشرات، فيكون عدد الأعداد $3\times4\times3=36$.

تدريب:

لتكن مجموعة الأرقام: $A=\{1,0,5,8\}$ والمطلوب:

1) كم عدداً مؤلّفاً من رقمين يمكن تشكيلُه من هذه الأرقام؟
2) كم عدداً مؤلّفاً من ثلاثة أرقام مختلفة، يقبل القسمة على 5 يمكن تشكيلُه من هذه الأرقام؟
3) كم عدداً زوجيّاً يتألّف من رقمين يمكن تشكيلُه من هذه الأرقام؟



② التراتيب:

مثال 1:

لتكن مجموعةُ الأرقام: $B=\{8,6,7\}$ ، ولنتساءل:

كم عدداً مؤلّفاً من رقمين مختلفين يمكن تشكيلُه من هذه الأرقام ؟

الحلّ:

بما أنّ العددَ مؤلّفٌ من رقمين مختلفين فهذا يعني أنّ لترتيبهما أهمّيّةً في تشكيل العدد، ونجدُ أنّ الأعداد هي: $86,68,87,78,67,76$ ، عددُها يساوي 6، إنّ كلّ اختيارٍ للعدد بهذا الأسلوب يسمّى ترتيباً.

مثال 2:

وجدْنا أنّه يمكن أن نشكّل 12 رمزاً مرتباً، كلٌّ منها يتألّف من حرفين مختلفين مرتّبين من مجموعة الحروف $X=\{A,B,C,D\}$ وهي:

$AB,AC,AD,BA,BC,BD,CA,CB,CD,DA,DB,DC$ إنّ كلّ اختيارٍ للرموز في هذه الحالة يسمّى أيضاً ترتيباً.

تعريف: لتكن D مجموعة غير خالية ذات n عنصراً، كلّ مجموعة جزئيّة مرتّبة منها ذات r عنصراً $(0\le r\le n)$ تسمّى ترتيباً لـ n عنصراً مأخوذاً r في كلّ مرّة،

ونرمِّز عددَ تراتيب n عنصراً مأخوذة r في كلّ مرّة بالرمز $p(n,r)$.

مثال:

بكم طريقةٍ تُوزّع ثلاثُ ميداليّاتٍ مختلفة على ثلاثةِ طلّاب فائزين في أولمبياد الرياضيّات من بين 9 طلّاب:

الحلّ:

عدد الطرائق = عدد تراتيب 9 أشياء مأخوذة 3 في كلّ مرّة

الميداليّة الأولى تُعطى بـ 9 طرائقَ مختلفةٍ.

الميداليّة الثّانية تُعطى بـ 8 طرائقَ مختلفة.

الميداليّة الثالثة تُعطى بـ 7 طرائق مختلفة.

فيكون عددُ الطرائق: $p(9,3)=9\times8\times7=504$

قانون التراتيب:

مبرهنةٌ نقبل صحّة المبرهنة الآتية:

عدد تراتيب n عنصراً مأخوذاً r في كلّ مرّة يُعطى بالقانون:

$$\boxed{p(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}$$ (عدد الحدود يساوي r)

(برهان هذا القانون يعتمد على المبدأ الأساسيّ للعدّ)

- إذا كان $r=n$ فعندئذٍ: $p(n,n)=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$

وهذه تُكْتَب: $p(n,n)=n!$

وتُقرأ (n عاملي). ونصطلح أنّ $0!=1$.

مثال 1: أوجدْ ناتج كلٍّ ممّا يأتي: a 】 $p(8,3)$, b 】 $p(5,5)$, c 】 $\frac{8!}{3!.7!}$

الحلّ:

a 】 $p(8,3)=8\times7\times6=336$

b 】 $p(5,5)=5\times4\times3\times2\times1=120$

c 】 $\frac{8!}{3!.7!}=\frac{8\times\cancel{7!}}{3!.\cancel{7!}}=\frac{8}{3!}=\frac{8}{3\times2\times1}=\frac{4}{3}$

مثال 1: إذا علمت أنّ $p(n,2)=30$ فأوجد قيمة n.

الحلّ:

شرط الحلّ: $n\geq2$ و n عددٌ طبيعيٌّ.

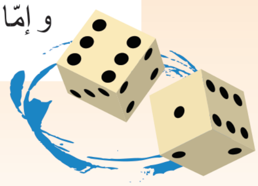
المعادلة تكافئ: $n(n-1)=30$

ومنها: $n^2-n-30=0$

وبالتحليل: $(n-6)(n+5)=0$

إذن إمّا $n=-5$ وهذا مرفوضٌ، لأنّه لا يحقِّقُ الشرط $n\geq2$،

و إمّا $n=6$ وهو الحلّ المطلوب.



مبرهنة: $p(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

الإثبات:

$$p(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: $p(9,7)=\dfrac{9!}{(9-7)!}=\dfrac{9!}{2!}=\dfrac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2!}{2!}=181440$

تدريب (حاول أن تحلّ):

أوجد قيمةَ n في كلّ من الحالتين الآتيتين (عيّن شرط الحلّ):

a] $p(n,2)-\frac{1}{2}p(2n,2)+25=0$

b] $3p(n,1)=p(n,2)$

③ **التوافيق:**

دعنا نفكّر ونناقش:

لتكن مجموعةُ الحروف $X=\{A,B,C,D\}$، كم مجموعةً جزئيّةً مؤلّفة من حرفين من حروف X يمكن تشكيلُها ؟

الحلّ:

وجدنا أنّه يمكن تشكيل 12 ترتيباً من المجموعة $X=\{A,B,C,D\}$ كما في الجدول الآتي:

AB	AC	AD	BC	BD	CD
BA	CA	DA	CB	DB	DC

ولكن يعيّن كلُّ ترتيبين مثل AB و BA المجموعة الجزئيّة $\{A,B\}$ نفسها. وهكذا يمكنُنا انطلاقاً من هذه التراتيب تشكيل 6 مجموعات مختلفة وهي:

$$\{A,B\} \quad , \quad \{A,C\} \quad , \quad \{A,D\} \quad , \quad \{B,C\} \quad , \quad \{B,D\} \quad , \quad \{C,D\}$$

واضح أنّ عددها يساوي 6.

ويمكن أن نكتب:

$$\frac{p(4,2)}{2!}=\frac{12}{2!}=6$$

نسمّي كلّاً من هذه المجموعات توفيقاً (لاحظ أنّه لا أهميّة لترتيب العناصر)

ونقول: إنّ عدد توافيق 4 عناصر مأخوذة مرّتين، في كلّ مرّة يساوي 6 .

تعريف: لتكن D مجموعةً غيرَ خالية ذات n عنصراً ، تُسمّى كلُّ مجموعة جزئيّة منها ذات r عنصراً توفيقاً لـ n عنصراً مأخوذاً r في كلّ مرّة، حيث $0\le r\le n$.

ونرمِّز عدد توافيق n عنصراً مأخوذة r في كلّ مرّة بالرمز $C(n,r)$.

قانون التوافيق: من خلال ما تقدّم وجدنا أنّ: $C(4,2)=\dfrac{P(4,2)}{2!}$

وبشكلٍ عامٍّ نقبَل أنّ: $C(n,r)=\dfrac{p(n,r)}{r!}$

تفكير ناقد: علّل صحّة القانون: $C(n,r)=\dfrac{p(n,r)}{r!}$

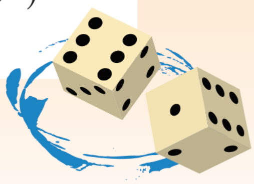
حالاتٌ خاصّة:

① $C(n,0)=1$, ② $C(n,1)=n$, ③ $C(n,n)=1$

مثال 1:

a 】 $C(5,3)=\dfrac{p(5,3)}{3!}=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$, b 】 $C(8,1)=8$

c 】 $C(12,12)=1$, d 】 $C(6,0)=1$



مثال2:

نسحب ثلاث كراتٍ معاً من صندوق فيه 9 كراتٍ مرقّمة، ما عددُ النتائجِ المختلفةِ التي نحصل عليها؟

الحلّ:

عددُ النتائج المختلفة يساوي: $C(9,3)=\dfrac{p(9,3)}{3!}=\dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=84$

مثال3:

يوجدُ في أحد الصفوف 10 طلّاب و 8 طالباتٍ، نرغبُ في تأليف لجنة أنشطة خماسيّةٍ من ثلاثة طلّاب وطالبتين من هذا الصفّ. ما عددُ لجان الأنشطة المختلفة التي يمكنُنا تأليفها ؟

الحلّ:

يمكنُ اختيار الطلّاب الثلاثة بـ $C(10,3)$ طريقة مختلفة، ويمكنُ اختيار طالبتين بـ $C(8,2)$ طريقة مختلفة، فيكونُ عددُ طرائقِ تشكيلِ اللّجنة، اعتماداً على المبدأ الأساسيّ في العدّ :

$$C(10,3)\times C(8,2)=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}\times\frac{8\times 7}{2\times 1}=3360$$

تفكيرٌ ناقد:

حاول أن تُبرهِنَ صحّةَ كلّ من الدستورين الآتيين:

الأوّل:	$C(n,r)=C(n,n-r)$
الثاني:	$C(n,r-1)+C(n,r)=C(n+1,r)$ بحيث $1\le r\le n$

ملاحظة:

1. يُستحسَنُ استعمالُ الدستورِ الأوّل عندما $r>\dfrac{n}{2}$.
2. نقبل أنّ: $C(n,r_1)=C(n,r_2)$ تقتضي أن يكونَ $r_1=r_2$ أو $r_1+r_2=n$.

مثال:

1 】 $C(98,97)=C(98,98-97)=C(98,1)=98$

2 】 $C(11,9)=C(11,2)=\dfrac{11\times 10}{2\times 1}=55$

تمرين محلول:

لتكنِ لدنيا المعادلةُ: $C\left(10,2r+5\right)=C\left(10,r+2\right)$

عيّن شرطَ الحلّ، ثُمّ أوجد قيمة r.

③ التوافيق:

شرط الحلّ: r عددٌ طبيعيٌ و $r\le 2$. ﴿علّل ذلك﴾

إمّا أن يكون $2r+5=r+2$ ومنه $r=-3$ وهو مرفوض.

و أمّا أن يكون : $2r+5+r+2=10$ ومنها $3r=3$ أي $r=1$.

تمرينات ومسائل

① اختصر كلّاً ممّا يأتي إلى أبسط شكل:

a 】 $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!}$, b 】 $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

c 】 $\dfrac{n!}{(n+1)!}$, d 】 $\dfrac{7!\ C\left(6,4\right)!}{p\left(5,5\right)}$

② حُلَّ كلاً من المعادلاتِ الآتية: (اذكر شرطَ الحلّ)

a 】 $C\left(n,6\right)=C\left(n,2\right)$

b 】 $C\left(n,3\right)=2p\left(n,2\right)$

c 】 $p\left(n-1,2\right)=4p\left(n-2,1\right)$

③ توجدُ على طاولة 8 وردات حمراء و 10 وردات بيضاء و 5 وردات صفراء، نريد تشكيلَ باقة تضمُّ 6 ورداتٍ حمراءَ و 7 ورداتٍ بيضاءَ و 4 وردات صفراءَ، بكم طريقةٍ يمكن تشكيل هذه الباقة ؟

④ بكم طريقةٍ يمكن اختيار 8 كتبٍ من 14 كتاباً في كلّ من الحالتين الآتيتين:

a) أن يكون كتابٌ مُعيّنٌ ضمن الكتبِ الثمانية المختارة؟
b) أن يكون كتابٌ مُعيّنٌ خارج الكتبِ المختارة؟

⑤ لتكنْ مجموعةُ الأرقام: $A=\{4,6,0,3,7\}$، كم عدداً طبيعيّاً مؤلّفاً من ثلاثةِ أرقامٍ، يمكنُ تشكيله من هذه المجموعة في كلٍّ من الحالات الآتية:

a) أرقامُ العدد كلّها مختلفة؟
b) العددُ يقبلُ القسمة على 5، ورقم مئاته فردي؟
c) العددُ يقبلُ القسمة على 2، ورقم مئاته أكبرُ تماماً من 4 ؟

⑥ مجموعتان من الأشخاص، تضمّ الأولى 9 أشخاص، وتضمّ الثانية 8 أشخاص. بكم طريقةٍ يمكن تشكيلُ لجنة خماسيّةٍ (رئيس اللّجنة، نائب رئيس اللّجنة، أمين سرّ اللّجنة، عُضوان) يُختار رئيسُها ونائبُه وأمينُ السّر من المجموعة الأولى، ويُختار العضوان المتبقّيان من المجموعة الثانية ؟

⑦ توجد ثلاث طرائقَ مختلفة تصل بين القرية A والقرية B، و أربع طرائقَ مختلفة تصل بين القرية B والقرية C والمطلوب:

a) بكم طريقةٍ يمكن لشخصٍ أن يصلَ من A إلى C مروراً بالقرية B؟
b) بكم طريقةٍ يمكن لشخصٍ أن يصلَ من A إلى C، ثُمّ يعودُ إلى A مروراً بالقرية B؟

⑧ تقع ثماني نقط على دائرة واحدة والمطلوب:

a) كم مثلّثاً يمكن رسمُه بحيث تكون رؤوسُه ثلاثاً من هذه النقط ؟
b) كم شكلاً خماسيّاً محدّباً يمكن رسمُه بحيث تكون رؤوسُه خمساً من هذه النقط ؟
c) علِّلْ:لماذا تكون الإجابة هي ذاتها في الحالتين ؟

⑨ بكم طريقة يمكنُ لستّة أشخاص أن يجلسوا:

a) في صفٍّ فيه 6 مقاعد ؟
b) حول طاولة مستديرة في ستّة مقاعد؟

نظريّة ذي الحدّين

سوف تتعلّم:

1) نظريّة ذي الحدّين واستعمالها.

2) مثلث الكرخي- باسكال واستعماله.

① نظريّة ذي الحدّين:

هي النّظريّة التي تعطي منشور التركيب $(a+b)^n$ في حالة عدد طبيعيٍّ n.

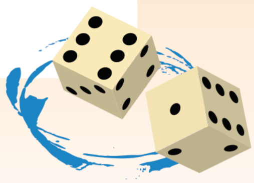
ولكن قبل أن نبدأ، نتأمل الجدول الآتي بقيم $C(n,r)$ في حالة $n \le 5$. يسمّى هذا المثلّثُ مثلّث باسكال، نسبةً إلى العالم بليز باسكال لدى الدول الغربيّة. ولكن وُجدت مخطوطاتٌ عربيةٌ للعالم الكرخي سَبقت أعمالَ باسكال عدّة قرون وفيها هذا المثلّث مكتوبٌ بدقّة حتّى $n = 10$.

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

لكي نوضّحَ العلاقة بين هذا المثلّث ومنشور ثنائيّ الحدّ أو ذي الحدّين يجب أن نحسبَ منشورَ المقدار $(a+b)^n$ في حالة $n \le 5$، فنجد أنّ:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1\,b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1\,b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\,b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\,b^4$$
$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

بملاحظة أمثالِ الحدود ومقارنتها مع مثلّث الكرخي باسكال نجد أنّها من الشكل $C(n,r)$ حيث:
$0 \le r \le n$ وأنّ كلّ حدٍّ هو من الشكل: $C(n,r)a^{n-r} \cdot b^r$



ولذلك نقبلُ صحّة القانون: $$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{r=n} C(n,r)a^{n-r}\ .b^r$$

ويُسمى بقانون ذي الحدّين (نظريّة ذي الحدّين، ويُعرف أيضاً بقانون الكرخي- نيوتن).

ونلاحظ في المنشور الخواصَّ الآتية:

- يتناقص أس a حدّاً بعد حدّ من n إلى الصفر، ويتزايد أس b حدّاً بعد حدّ من 0 إلى n، ومجموع أسّيهما في كلّ حدّ يساوي n.
- كلّ حدّين متساويي البُعد عن الحدّين الأول والأخير لهما الأمثالُ نفسَها. (علّل هذه الخاصّة)

مثال1: أوجد منشورَ التركيب $(x+2)^6$.

الحلّ:

بالمقارنة مع $(a+b)^n$ نجد: $a=x\ ,b=2\ ,n=6$ ويكون:

$$(x+2)^6=\sum_{r=0}^{r=6} C(6,r)x^{6-r}\cdot 2^r$$

$$=C(6,0)x^6.2^0+C(6,1)x^5.2^1+C(6,2)x^4.2^2+$$

$$C(6,3)x^3.2^3+C(6,4)x^2.2^4+C(6,5)x^1.2^5+C(6,6)x^0.2^6$$

$$=x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+64$$

مثال2: أوجدْ منشورَ $(x-y)^5$.

الحلّ:

بالمقارنة مع $(a+b)^n$ نجدُ أنّ: $n=5\quad,\quad b=-y\quad,\quad a=x$

$$(x-y)^5=\sum_{r=0}^{r=5} C(5,r)x^{5-r}.(-y)^r$$

$$=C(5,0)x^5+C(5,1)x^4.(-y)+C(5,2)x^3.(-y)^2+$$

$$C(5,3)x^2.(-y)^3+C(5,4)x.(-y)^4+C(5,5).(-y)^5$$

$$=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$$

تدريبٌ (حاولْ أن تحلّ):

أوجد منشورَ كلّ من التراكيب الآتية:

1 】 $\left(\frac{1}{y}+y\right)^4$, 2 】 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$, 3 】 $(2x-1)^5$

② الحدّ العامُّ لمنشور ذي الحدّين:

وجدْنا أنّ أمثال كلّ حدّ في منشور $(a+b)^n$ هو من الشكل $C(n,r)$ (حيث $r=0,1,\ldots,n$)

فمَثل الحدّ الأول هو $C(n,0)$ يوافقُ $r=0$

ومَثل الحدّ الثاني هو $C(n,1)$ يوافقُ $r=1$

ومَثل الحدّ الثالث هو $C(n,2)$ يوافقُ $r=2$

....

وبالتالي نجد أنّ مثلَ الحدّ ذي الترتيب k يوافق $r=k-1$ ويكون $k=r+1$ ،

لذلك يكون الحدُّ العامُّ لمنشور ذي الحدّين هو:

$$T_{r+1}=C(n,r)a^{n-r}b^r$$

ويمكن أن نستخدمَ دستور الحدّ العام في إيجاد حدٍّ ذي ترتيب معيّن من دون أن نقوم بعمليّة النّشر، وفي حالات أخرى أيضاً كما في الأمثلة الآتية:

مثال1:

أوجدِ الحدّ الخامس في منشور $\left(x^2-\frac{1}{y^3}\right)^6$.

الحلّ:

الحدّ العام لهذا المنشور: $T_{r+1}=C(6,r)(x^2)^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{y^3}\right)^r$

وبما أنّ المطلوبَ هو الحدّ الخامس فإنّ: $r+1=5$ أي $r=4$.

إذن : $T_5=C(6,4)(x^2)^{6-4}\cdot\left(-\frac{1}{y^3}\right)^4$

$$T_5=C(6,2)x^4\left(\frac{1}{y^{12}}\right)=\frac{6\times 5}{2\times 1}\cdot\frac{x^4}{y^{12}}=\frac{15x^4}{y^{12}}$$

مثال2:

هل يوجدُ حدٌّ مستقلٌّ عن x في منشور $\left(x^{2}+\frac{1}{x}\right)^{9}$ ؟ عيّنه إن وجد.

وهل يوجدُ في المنشورحدٌّ يحوي x^{5}؟ (علّل).

الحلّ:

الحدّ العام لهذا المنشورهو:

$r\in\{0,1,2,3,\cdots,9\}$

$$T_{r+1}=C(9,r)\left(x^{2}\right)^{9-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^{r}$$
$$=C(9,r)x^{18-2r}x^{-r}$$
$$=C(9,r)x^{18-3r}$$

إذا وُجدَ حدٌّ مستقلٌّ عن x يكون لأجله:

$18-3r=0$ (علّل)

ومنها $r=6$ مقبول

أي أنّه يوجد حدّ مستقلّ عن x وهو الحدُّ السابع وقيمته:

$$T_{7}=C(9,6)=C(9,3)=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

ثُمّ نضع:

$$x^{18-3r}=x^{5}$$

ومنها: $18-3r=5$

ومنها: $3r=13$

ومنها: $r=\frac{13}{3}$ مرفوض (علّل)

أي أنّه لا يوجد في المنشور حدّ يحوي x^{5}.

③ الحدّ الأوسط:

وجدْنا أنّ عدد حدود منشور $(a+b)^{n}$ هو $n+1$ (حيث $n\in\mathbb{N}$)

فإذا كان n زوجيّاً فإنّ عددَ حدود المنشور فرديٌّ، وعندئذٍ يوجد في المنشور حدّ يكون عدد الحدود التي قبله مساوياً عددَ الحدود التي بعدَه، هذا الحدّ ندعوه بالحدّ الأوسط للمنشور، ويكون ترتيبه يساوي $\frac{n}{2}+1$ (يوافق $r=\frac{n}{2}$ في دستور الحدّ العام، وقيمته: $T_{\frac{n}{2}+1}=C\left(n,\frac{n}{2}\right)a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$)

وإذا كان n فردياً فإنّ عدد حدود المنشور زوجيٌّ، وعندئذٍ لا يوجدُ في المنشور حدٌّ أوسط، ولكن نعتبر أنّ فيه حدّين أوسطين هما:

الحدُّ الأوسط الأول: $T_{\frac{n+1}{2}}$ ترتيبه $\frac{n+1}{2}$.

الحدّ الأوسط الثاني: $T_{\frac{n+3}{2}}$ ترتيبه $\frac{n+3}{2}$.

تطبيق 1:

أوجد الحدَّ الأوسط في منشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

الحلّ:

دستور الحدّ الأوسط: $T_{\frac{n}{2}+1}=C\left(n,\frac{n}{2}\right)a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$

حيث $n=10$ يكون الحدّ الأوسط هو السادس:

$$T_6=C(10,5)\left(x^2\right)^5.\left(\frac{1}{x}\right)^5$$

$$=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}\times x^{10}\times x^{-5}=252x^5$$

تطبيق 2:

أوجد الحدّين الأوسطَيْن في منشور $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{11}$.

الحلّ:

الحدّ العام: $T_{r+1}=C(11,r)\left(x^2\right)^{11-r}.\left(-\frac{1}{x}\right)^r$

ترتيبُ الحدّ الأوسط الأوّل: $6=\frac{11+1}{2}=\frac{n+1}{2}$ ولأجله يكون $r=5$

ويكون ترتيبُ الحدّ الأوسط الثاني يساوي 7 ولأجله يكون $r=6$

فالحدُّ الأوسط الأوّل هو السادس:

$$T_6 = C(11,5)\left(x^2\right)^{11-5}.\left(-\frac{1}{x}\right)^5$$

$$= \frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}\times x^{12}\times\left(-x^{-5}\right) \quad = -462x^7$$

والحدّ الأوسط الثاني هو السابع:

$$T_7 = C(11,6)\left(x^2\right)^{11-6}.\left(-\frac{1}{x}\right)^6$$

$$= C(11,5)\times x^{10}\,.\,x^{-6}$$

$$= 462x^4$$

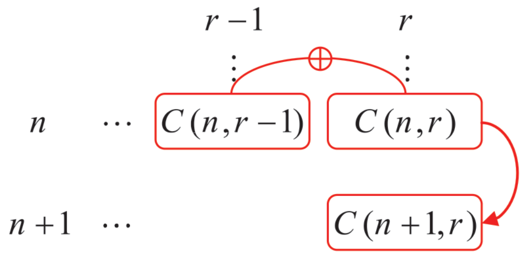
تدريب: أوجِد الحدّ الأوسط في منشور $\left(xy+\frac{1}{z}\right)^{14}$.

④ مثلّث الكرخي ـ باسكال:

إنّ المرحلة الأكثرَ صعوبةً في إيجاد منشور نيوتن هي في تعيين أمثال الحدود، ولقد رأينا في بداية هذا البحث أنّه يمكن تنظيم هذه الأمثال في مثلّث أسميناه مثلّث الكرخي ـ باسكال، يحوي السطر الموافق للدليل n على أمثال منشور $(a+b)^n$. لنتأمّل هذا المثلّثَ وقد وسّعناه حتّى $n=7$، ولنسعَ إلى إيجاد قاعدةٍ تفيدُ في تعيين أمثال سطرٍ بمعرفة أمثال السطرِ الذي سبقه.

n \ r	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	6	1

إذا تأمّلنا مثلّث الكرخي_باسكال، نلاحظُ الخواصّ الآتية التي تفيد في حساب أسطره بسهولة :



1- العددان الأول والأخير في كلّ سطر يساويان الواحد.

2- إنّ أيّ عدد غير ذلك في المثلّث يساوي مجموعَ العدد الواقع فوقه مباشرة، والعدد الذي يقع إلى يسار هذا الأخير مباشرة.

تفيد هذه الخواصّ التي نقبل صحّتها في حساب أمثال منشور ثنائي الحدّ بسهولة.

تطبيق:

أوجد منشور $\left(x+\frac{1}{xy}\right)^7$. ثمّ أوجدْ منشور $\left(2x-\frac{1}{xy}\right)^8$.

الحلّ:

من مثلّث الكرخي- باسكال نجدُ أمثال منشور $(a+b)^7$ وهي:

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

فيكون منشور $\left(x+\frac{1}{xy}\right)^7$:

$$\left(x+\frac{1}{xy}\right)^7 = 1x^7 + 7x^6.\frac{1}{xy} + 21x^5.\left(\frac{1}{xy}\right)^2 + 35x^4.\left(\frac{1}{xy}\right)^3 + 35x^3.\left(\frac{1}{xy}\right)^4$$

$$+21x^2.\left(\frac{1}{xy}\right)^5 + 7x.\left(\frac{1}{xy}\right)^6 + 1.\left(\frac{1}{xy}\right)^7$$

وبالإصلاح والاختصار نجد أنّ :

$$\left(x+\frac{1}{xy}\right)^7 = x^7 + \frac{7x^5}{y} + \frac{21x^3}{y^2} + \frac{35x}{y^3} + \frac{35}{xy^4} + \frac{21}{x^3y^5} + \frac{7}{x^5y^6} + \frac{1}{x^7y^7}$$

وانطلاقاً من السطر الذي يحوي أمثال منشور $(a+b)^7$

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

نحسُب أمثال منشور $(a+b)^8$ فنجد

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

ومنه

$$\left(2x-\frac{1}{xy}\right)^8 = 1.(2x)^8 + 8(2x)^7\left(-\frac{1}{xy}\right) + 28(2x)^6\left(-\frac{1}{xy}\right)^2 + 56(2x)^5\left(-\frac{1}{xy}\right)^3$$

$$+70(2x)^4\left(-\frac{1}{xy}\right)^4 + 56(2x)^3\left(-\frac{1}{xy}\right)^5 + 28(2x)^2\left(-\frac{1}{xy}\right)^6 + 8(2x)\left(-\frac{1}{xy}\right)^7 + \left(-\frac{1}{xy}\right)^8$$

وبالإصلاح والاختصار نجدُ:

$$\left(2x-\frac{1}{xy}\right)^8 = 256x^8 - \frac{1024x^6}{y} + \frac{1792x^4}{y^2} - \frac{1792x^2}{y^3} + \frac{1120}{y^4} - \frac{448}{x^2y^5}$$

$$+\frac{112}{x^4y^6} - \frac{16}{x^6y^7} + \frac{1}{x^8y^8}$$

تدريب: **اكتبْ منشور** $(1+xy)^9$.

تفكيرٌ ناقدٌ:

أثبت أنّ مجموعَ معاملاتِ (أمثال) حدودِ منشور التركيب $(a+b)^n$ يساوي 2^n وذلك باستخدام قانون ذي الحدّين.

تطبيق: $$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{r=n} C(n,r).x^r$$ (علّل)

تمرينات ومسائل

① استخدمْ نظريّة ذات الحدّين لإيجاد منشور كلّ من:

a] $(x-5)^6$, b] $\left(1-\frac{1}{x}\right)^7$

② ليكن لدينا التركيبُ $(2xy+z^2)^{10}$، و المطلوبُ:

a] أوجدِ الحدّ الأوسطَ في منشور هذا التركيب.

b] أوجدِ الحدّ السادسَ في منشوره.

③ ليكن لدينا التركيب $(2xy^2-z)^9$ و المطلوب:

a] أوجدِ الحدّ الذي يحوي y^6 في منشور هذا التركيب.

b] أوجدِ الحدّين الأوسطين في منشوره.

④ بفرض أنّ $C(10,6)\,x^4y^6$ حدّ في منشور $(x+y)^{10}$ اكتُب كلّاً من الحدّين الذي يليه، والذي يسبقُه مباشرة.

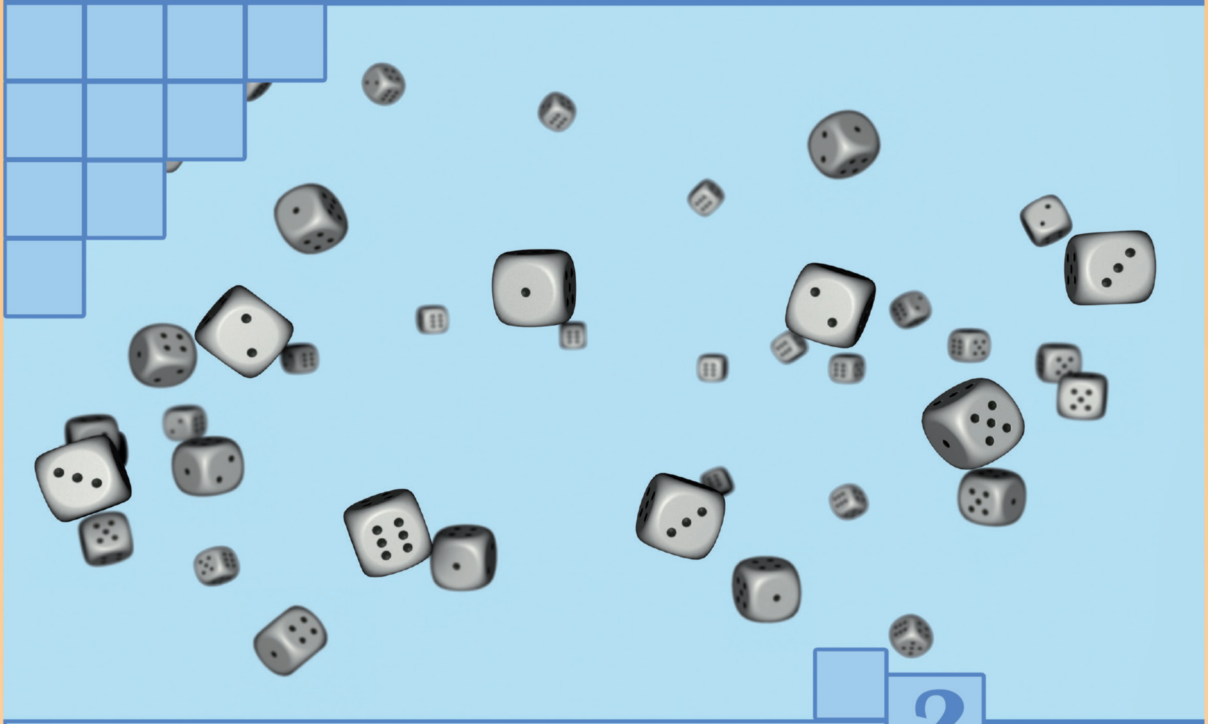
⑤ إذا كان أحدُ الحدود يحوي x^4 في منشور $(x+y)^{11}$، المطلوبُ:

a] ما أسّ y في هذا الحدّ ؟ b] ما معامل هذا الحدّ ؟

⑥ اكتب منشور $\left(xy+\frac{1}{xz}\right)^6$.

من علماء الرّياضيّات

- أبو بكر محمد الكرخي (بغداد – توفّي عام 1029 م)، وهو من أشهر الرّياضيّين العرب الذين كان لهم دورٌ عظيمٌ في تقدُّم العلوم الرياضيّة.
- بليز باسكال (1623 – 1662 م) فيلسوف ورياضيّ وفيزيائيّ فرنسيّ يُنسب إليه المثلّث المعروف بمثلث باسكال.
- إسحق نيوتن (1642 – 1727 م) فيلسوفٌ رياضيٌّ وفيزيائيٌّ إنكليزيٌّ، يُنسب إليه منشور ذي الحدّين، ولكن تبيّن أنّ أبا بكر الكرخيّ كان قد توصّل إلى قانون ذي الحدّين، ومثلّث باسكال قبل هذين العالمين بقرون، و قد اكتُشفَ ذلك ضِمْن مخطوطٍ للكرخيّ كان قد عَثَر عليه المؤرِّخون، لذلك من الإنصاف أن يُدعى قانون ذي الحدّين قانون الكرخي– نيوتن، وأن يُدعى المثلّث المذكور مثلّث الكرخيّ– باسكال.



2

الاحتمال

الاحتمالات

سوف تتعلّم:

1) مفهوم الاحتمال _التجرِبة _فضاء العيّنة .

2) الحدث وأنواعه _ دالة الاحتمال _الفضاء المنتظم .

3) الاحتمال الشّرطيّ _ الاحتمال المركّب .

4) الأحداث المستقلّة .

① تعاريف:

1) **التجرِبة:** هي كلّ عملٍ ينتج عنه ملاحظةٌ أو قياس.

2) **التجرِبة العشوائيَّةُ:** هي كلُّ تجرِبة نعلم مسبقاً نتائجها الممكنة جميعها (الإمكانات) ، وإن كنّا لا نستطيعُ أن نتنبّأ بالنتيجةِ (الواقعة) التي ستقع فعلاً بشكلٍ دقيق.

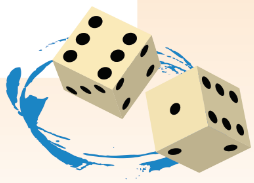
3) **فضاء العيّنة:** هو مجموعةُ الإمكانات المرتبطة باختبار مفروض، ونرمز إليه بـ S.

4) **الحدث:** هو كلّ مجموعة جزئية من فضاء العيّنة، ونرمز إليه بأحرف كبيرة A , B , C,......

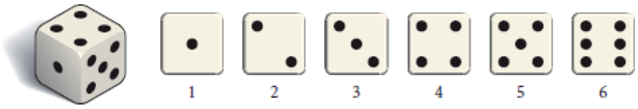
5) **وقوعُ الحدث:** عند إجراء التجرِبة، نحصلُ على أحد الإمكانات، نسمّيه واقعة، ونُرمز إليها بـ x.

ونقول: (الحدث A وقع) $\Leftrightarrow x \in A$

(الحدث A لم يقعْ) $\Leftrightarrow x \notin A$



الجدول الآتي يبيّن فضاء العيّنة لكلِّ تجربة من التجارب الآتية:

التجرِبة	فضاء العيّنة	عدد عناصر S
رمي قطعة نقود مرّة واحدة	$S=\{H,T\}$	$n(s)=2^1=2$
رمي قطعة نقود مرّتين متتاليتين، أو رمي قطعتي نقود معاً مرّة واحدة	$S=\{(H,H),(T,T),(H,T),(T,H)\}$	$n(s)=2^2=4$
رمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية أو رمي ثلاث قطع نقود معاً مرة واحدة	$S=\{(H,H,H),(T,T,T),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(T,T,H),(T,H,T),(T,T,H)\}$	$n(s)=2^3=8$
رمي حجر نرد مرة واحدة	 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$	$n(s)=6$
رمي حجر نرد مرتين متتاليتين أو رمي حجرَيْ نرد معاً مرة واحدة	$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$	$n(s)=6^2=36$

دعنا نفكّر ونناقش:

إذا كانت $S=\{a,b,c\}$ فضاءَ عيّنة لتجرِبة ما ، فإنّ المجموعة:

$$\mathcal{P}(S)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

تُمثِّل جميعَ المجموعات الجزئيّة من S ، و نسمّيها مجموعة أجزاء S، ويكونُ $\boxed{A\subseteq S \Leftrightarrow A\in\mathcal{P}(S)}$

ونقبل بشكل عامٍّ: إذا كانت S مجموعةً منتهية ، عددُ عناصرها n فإنّ عددَ عناصر $\mathcal{P}(S)$ هو 2^n،

وبما أنَّ كلَّ مجموعة جزئيّة من S تُمثّل حدثاً، فإنّ $\mathcal{P}(S)$ تُمثِّل مجموعةَ جميع الأحداث المرتبطة بالتجرِبة المدروسة ومن هذه الأحداث:

- ❖ الحدثُ المستحيلُ $\varnothing$: هو الحدثُ الذي لا يقعُ أبداً.
- ❖ الحدثُ الأكيدُ S: هو الحدثُ الذي يقعُ دائماً.

❖ الحدث البسيط: هو كلُّ حدث مؤلَّف من عنصر واحد فقط.

عمل تعاونيٌّ:

في تجربة رمي حجر نردٍ مرّةً واحدةً:

اكتبْ فضاء العيّنة، لاحظ أنْ $B=\{1,3,5\}$ تُمثّل حدثاً يمكنُ تسميتُه حدث ظهور عددٍ فردي.

وبالمثل عيِّن الأحداثَ الآتية:

A: حدثُ ظهورِ عدد زوجيٍّ.

B: حدث ظهور عددٍ أوَّلي.

C: حدث ظهور عدد زوجيٍّ أكبر من 4.

D: حدثُ ظهور عدد زوجيٍّ أصغرَ من 2 .

E: حدث ظهور عدد طبيعيّ.

ثم املأ الفراغاتِ الآتيةَ:

الحدثُ ...... أكيد.

الحدث ...... مستحيل.

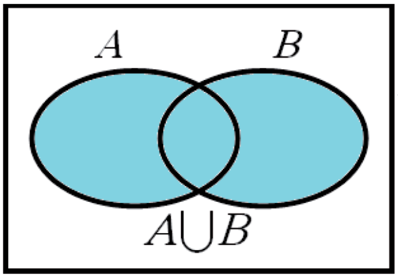
الحدث ...... بسيط.

② العمليّات على الأحداث:

ليكن S فضاءَ العينة لاختبارٍ ما.

وليكن A, B حدثين منه فإنّ:

2 . 1. اجتماعُ حدثين.

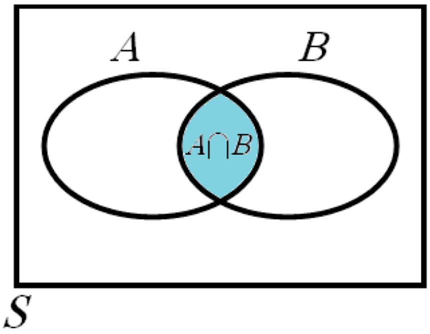


- اجتماعُ حدثين نرمز إليه بـ $A\cup B$: هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا كانت نتيجةُ التجرِبة تنتمي إلى أحد الحدثين على الأقلّ.

ونقبل صحّة ما يأتي:

$$A\cup B \quad B\cup A$$
$$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$$
$$A\cup S=S\cup A=S$$
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \qquad :C\subseteq S$$

2. تقاطعُ حدثين:



- تقاطع حدثين نرمز إليه بـ $A\cap B$: هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا كانت نتيجةُ التجرِبة تنتمي إلى الحدَثَيْن معاً.

ونقبل صحّة ما يأتي:

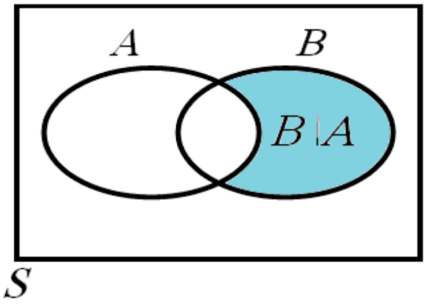
$$A\cap B=B\cap A$$
$$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$$
$$A\cap S=S\cap A=A$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \qquad :C\subseteq S$$

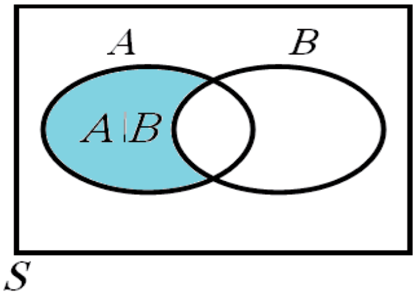
ونقبل صحّة:

$$A\cup(B\cap C)\equiv(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

3. فرق حدثين

- فرقُ الحدثين A و B نرمز إليه بـ حدث وقوع A فقط.





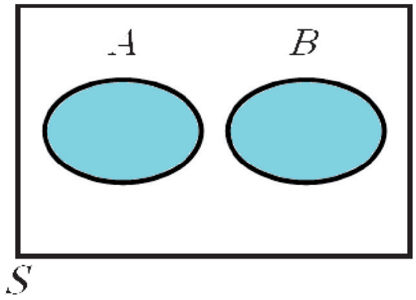
هو الحدث الذي يقعُ إذا كانت النتيجة تنتمي إلى A، ولا تنتمي إلى B.

ونقبل صحّة ما يأتي:

$$A \setminus A = \varnothing$$
$$A \setminus \varnothing = A$$
$$\varnothing \setminus A = \varnothing$$
$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

2 . 4. الحدثان المتنافيان:

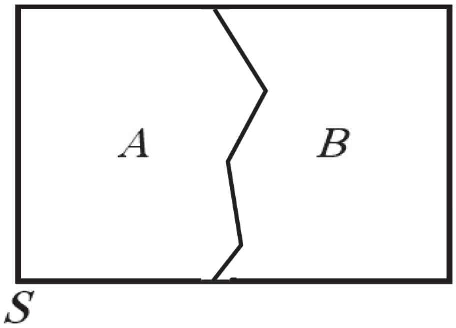
- الحدثان المتنافيان: نقولُ إنّ الحدثين B , A متنافيان، إذا وفقط إذا تحقَّق $A \cap B = \varnothing$ إنّ وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر.



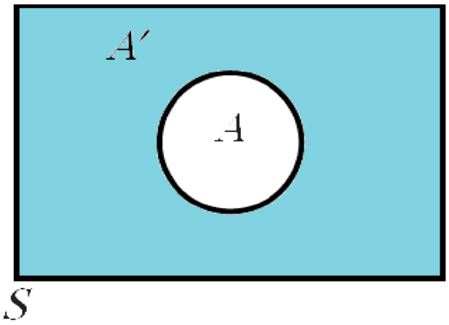
2 . 5. الحدثان المتضادّان:

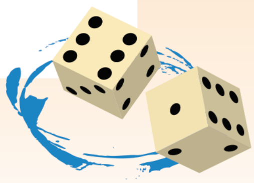
- الحدثان المتضادّان: نقول إنّ الحدثين A , B متضادّان (متتامّان) إذا وفقط إذا تحقَّق:

$A \cup B = S$ و $A \cap B = \varnothing$



وعندئذٍ يكون: $B' = A$, $A' = B$ (حيث A' الحدث المتمّم للحدث A).





عمل تعاونيّ:

في تجرِبة رمي حجر نرد مرّتين متتاليتين.

S فضاء العيّنة و A: الحدث أن يكون مجموعُ النقاط على الوجهين الظاهرين **8**.

و الحدث B: حدثُ ظهور رقمَيْن متساويَيْن.

لاحظِ الجدول الآتي:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ثُمّ عيّن كلّاً من الأحداث الآتية : $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, A' , B , A.

③ دالّة الاحتمال:

تعريف: دالة الاحتمال:

ليكن S فضاءَ العيّنة المرتبط باختبار ما، نسمّي كلَّ دالة $P : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$

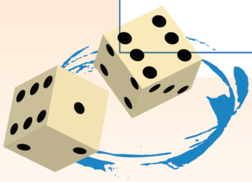
$A \to P(A)$ [حيث $P(A)$ احتمال وقوع الحدث A]

دالّة احتمال إذا وفقط إذا حقّقت الموضوعتين الآتيتين:

1) $P(S) = 1$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (حيث A , B متنافيان)

وندعو الثلاثيّة $(S , \mathcal{P}(S), P)$ فضاءً احتماليّاً.



ملاحظات:

- إذا كانت S مجموعة منتهية، يُسمّى الفضاء الاحتمالي حينئذٍ فضاءً منتهياً.
- في الفضاء المنتهي إذا كان لجميع الأحداث البسيطة الاحتمال ذاته نسمّيه فضاءً منتظماً.

و إذا كان $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ فإنّ:

$$P(x_1)=P(x_2)=\cdots=P(x_n)=\frac{1}{n}$$

- وإذا كان $A=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r\}$ حدثاً ما في فضاء احتمالي فإنّ احتمال هذا الحدث يساوي مجموع احتمالات أحداثه البسيطة.

$$P(A)=P(x_1)+P(x_2)+\ldots\ldots+P(x_r)$$

- وإذا كان هذا الفضاء منتظماً

يكون
$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}$$

أمثلة:

1) في تجرِبة إلقاء قطعة نقود مرّة واحدة يكونُ احتمالُ ظهور الشعار $P(H)=\frac{1}{2}$ (علّل).

2) في تجرِبة رمي حجر نرّد مرّة واحدة يكون احتمال الحدث A (ظهور عدد زوجيّ) $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (علّل).

3) في تجرِبة رمي قطعة نقود ثلاث مرّات متتالية يكون احتمالُ الحدث B (الحصول على شعار في الرّمية الثّالثة) هو $P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (علّل).

تمرين محلول:

يحوي صندوقٌ 10 كراتٍ متماثلة (5 حمراء ، 4 بيضاء ، واحدة سوداء)، نسحب من الصندوق عشوائيّاً كرتين معاً، والمطلوب:

1) ما احتمالُ أن تكون الكرتان المسحوبتان من اللّون الأحمر؟

2) ما احتمالُ أن تكون إحدى الكرتين المسحوبتين حمراءَ، والأخرى بيضاء؟

الحلّ:

نَعُدُّ: A : الحدثَ أن تكون الكرتان المسحوبتان من اللون الأحمر.

B : الحدث أن تكون إحدى الكرتين المسحوبتين حمراءَ والأخرى بيضاء.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{C(5,2)}{C(10,2)}=\frac{2}{9} \quad 1$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{C(5,1).C(4,1)}{C(10,2)}=\frac{4}{9} \quad 2$$

حاول أن تحلّ:

1) ما احتمالُ ظهور شعارٍ واحد على الأقلّ عند رمي قطعتي نقود معاً مرّة واحدة؟

2) ما احتمالُ ظهور كتابة واحدة على الأقلّ عند رمي ثلاث قطع نقود معاً مرّة واحدة؟

3) ما احتمالُ ظهور وجهين مجموع نقاطهما أصغر من 9 أو يساويها عند رمي حجري نرد معاً مرة واحدة؟

④ مبرهنات:

ليكن $(S,\mathcal{P}(S),P)$ فضاءً احتماليّاً منتهياً، وليكن A , B حدثين منه فإنّ:

مبرهنة1:

$$\boxed{P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)}$$

البرهان:

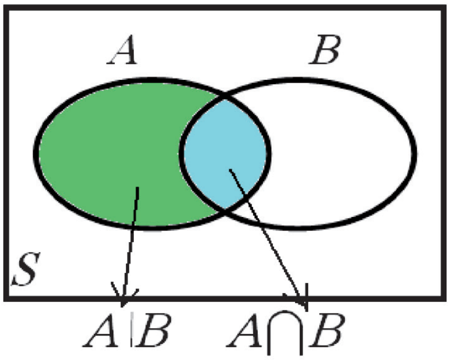
إنّ الحدثين $A\setminus B$, $A\cap B$ متنافيان

$$A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$$

$$P(A)=P[(A\setminus B)\cup(A\cap B)]$$

$$P(A)=P(A\setminus B)+P(A\cap B)$$

$$P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$$



مبرهنة2:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

البرهان:

($A\setminus B$, B حدثان متنافيان)

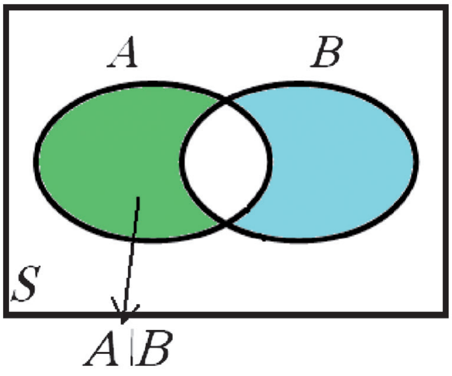
$$A\cup B=(A\setminus B)\cup B$$

$$P(A\cup B)=P[(A\setminus B)\cup B]$$

$$P(A\cup B)=P(A\setminus B)+P(B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



ونقبل صحّة الآتي:

1) $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\le P(B)$
2) $P(\varnothing)=0$
3) $P(A')=1-P(A)$

نقبل أنّ: $P(A\setminus B)=p(A\cap B')$

مثال:

يتسابق ثلاثةُ عدّائين A,B,C معاً، فإذا كان احتمالُ فوز A ضعفي فوز B، واحتمال فوز B ضعفي احتمال فوز C فما احتمال فوز:

1) كلٍّ منهم ؟

2) B أو C؟

الحل:

1) نفترض احتمال فوز C هو $p(C)=x$ فيكون: $P(A)=4x$, $P(B)=2x$

لكن: $P(A)+P(B)+P(C)=1$

$$4x+2x+x=1$$

$$7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

إذاً: $P(C) = \frac{1}{7}$ فيكون $P(A) = \frac{4}{7}, P(B) = \frac{2}{7}$

2) الحدث فوز B أو C هو $B \cup C$:

يكون $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$ (**علّل**).

$$= \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

حاول أن تحلّ:

1- صفّ دراسيّ فيه 8 طالبات و 12 طالباً، نريدُ تشكيل لجنة مكوَّنة من ثلاثة أشخاص من هذا الصفِّ بطريقة عشوائيّةٍ، أوجد احتمال أن:

1) تكونَ اللّجنة من الطالبات فقط.

2) تكونَ في اللّجنة طالبتان فقط.

3) تكون في اللّجنة طالبة واحدة على الأقلّ.

4) يكون في اللّجنة طالبٌ واحدٌ على الأكثر.

2- في تجرِبةِ رمي حجرَيْ نرد معاً مرّةً واحدة، ليكن:

A : حدثُ ظهور ثلاث نقط، على أحد الوجهين فقط.

B : حدث ظهور وجهين، مجموع نقاطهما أصغر من 7.

والمطلوب: احسبِ احتمالَ كلٍّ من الأحداث الآتية:

$$A, B, A \cap B, A \cup B, A \cap B', A' \cap B', A' \cup B', A \setminus B, (A \cup B)', (A \cap B)'$$

3- يحوي صندوق 10 مناديلَ متماثلة (**5** من الحرير، **3** من الصوف، و 2 من القطن) سحبت سيّدة عشوائيّاً ثلاثةَ مناديلَ معاً، احسُبِ احتمالَ كلٍّ من الأحداث الآتية:

A : المناديل المسحوبة جميعُها من الحرير.

B : المناديل المسحوبة من نوعٍ واحد.

C: المناديل المسحوبة من أنواعٍ مختلفة (منديل من كلِّ نوع).

D : المناديلُ المسحوبة جميعها ليست من نوعٍ واحد.

E : منديلٌ واحد على الأقلِّ بين المناديل المسحوبة من القطن.

4- 100 طالبٍ في مركز لتعليم اللّغات، يدرس الفرنسيّة منهم 50 طالباً، والإسبانية 40 طالباً، و 15 طالباً يدرسون اللُّغتين معاً، اختير طالبٌ بطريقة عشوائيّة، أوجد احتمال أن:

- يدرسَ اللُّغة الفرنسيّة أو الإسبانيّة.
- لا يكون من دارسي اللّغة الفرنسيّة ولا من دارسي الإسبانيّة.
- يدرس لغة واحدة فقط.
- يدرس الفرنسيّة فقط.

⑤ الاحتمالُ المشروط:

مثال تمهيديٌّ:

في اختبار رمي حجر نرد مرّةً واحدةً ليكن لدينا الحدثان: $A=\{1,3,5,6\}$ ، $B=\{1,2,3,4\}$

يكون $P(A)=\frac{4}{6}\ ,\ P(B)=\frac{4}{6}$

فإذا ألقي حجر النرد مرّة واحدة، وعلمنا أنّ الحدثَ B قد وقع ، فيكون عددُ الحالات الممكنة بعدَ وقوع الحدث B هو : $n(B)=4$، وعددُ الحالات المواتية لوقوع الحدث A هو $n(A\cap B)=2$

ويصبحُ احتمالُ وقوع الحدث A بعد وقوع الحدث B يساوي $\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

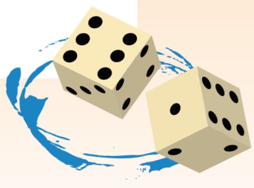
ونرمز إليه بـ $P_B(A)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ ويقرأُ احتمال A علماً أنّ B قد وقعَ (أو احتمال وقوع A بشرط وقوع B)، وبقسمة حدّي الكسر على $n(S)$ يكون:

$$P_B(A)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

وبشكلٍ عامٍّ نكتب:

$$\boxed{P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad : P(B)\neq 0}$$

وتُسمَّى هذه العلاقةُ قانونَ الاحتمال المشروط.



⑥ قاعدة الاحتمال المركّب لحدثين (قانون الضرب):

من قانون الاحتمال الشرطيّ: $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ نجدُ:

$$P(A\cap B)=P(B)\,.\,P_B(A) \quad : P(B)\neq 0$$

وكذلك

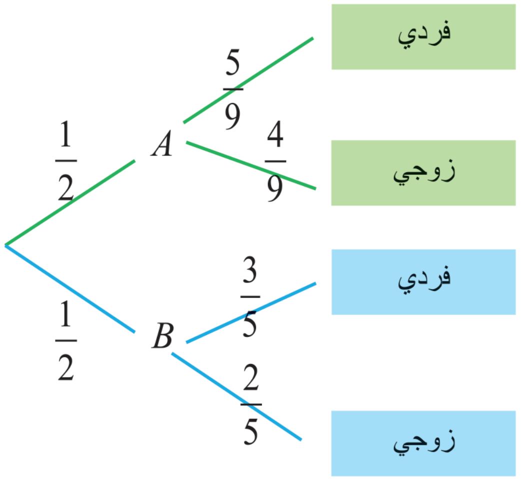
$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P_A(B) \quad : P(A)\neq 0$$

مثال 1:

يحوي الصندوقُ (A) 9 بطاقات مرقَّمة من 1 إلى 9، ويحوي الصندوقُ (B) 5 بطاقاتٍ مرقَّمة من 1 إلى 5 اختير أحدُهما عشوائياً، وسُحبت منه بطاقةٌ ، فإذا كان رقمُ البطاقة المسحوبة زوجيّاً ، فما احتمالُ أن تكون البطاقةُ قد سُحِبت من الصندوق A ؟

الحلّ:

يمكنُ استخدام الشجرة البيانيّة المجاورة.



ليكن الحدثُ C أن يكونَ رقمُ البطاقة زوجيّاً، فيكون الاحتمال المنشود:

تدريب:

إذا كانت C , B , A ثلاثةَ أحداثٍ في فضاء احتمالي $(S, \mathcal{P}(S), P)$ فما الشروطُ اللّازمة لتتحقَّق العلاقة الآتية :

$$P(A\cap B\cap C)=P\left[(A\cap B)\cap C\right]=P(A\cap B)\,.\,P_{A\cap B}(C)$$

$$=P(A).P_A(B).P_{A\cap B}(C)$$

مثال2:

تحتوي علبة 12 مصباحاً كهربائيّاً، منها 8 مصابيحَ لتوفير الطاقة، والباقي مصابيح عاديّة، اخترنا مصباحَين عشوائيّاً من هذه العلبة واحداً تلوَ الآخر من دون إعادة:

1) أوجدِ احتمال أن يكون المصباحان من مصابيح توفير الطاقة.

2) أوجدِ احتمال أن يكون أحدُهما عادياً والآخر لتوفير الطاقة.

الحلّ:

ليكنِ الحدثُ A أن يكون المصباحُ المختارُ أولاً لتوفير الطاقة، والحدث B أن يكون المصباحُ المختار ثانياً لتوفير الطاقة، والحدثُ C ظهور مصباح عاديٍّ:

❶ $$P(A\cap B)=P(A).P_A(B)=\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}=\frac{14}{33}$$

❷ $$P(A\cap C)=P(A).P_A(C)=\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}\times 2=\frac{16}{33}$$

⑦ الأحداثُ المستقلّة احتماليّاً:

تعريف: دالّة الاحتمال:

ليكن A, B حدثين في فضاء احتماليّ $(S,\mathcal{P}(S),P)$ ، نقول إنّ هذين الحدثين مستقلّان احتمالياً أو اختصاراً (مستقلّان) إذا تحقّق الشرط:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A).P(B)}$$

وتعتمدُ هذه العلاقة معياراً لدراسة الاستقلال الاحتماليّ لحدثين.

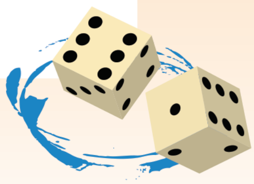
وإذا لم يتحقَّق هذا المعيارُ، نقول حينئذٍ: إنّ الحدثين غيرُ مستقلّين.

ملاحظة:

إذا كان $P(A)\neq 0$ وكان الحدثان A و B مستقلّين احتماليّاً كان:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

أي أنّ وقوع الحدث A لا يغيّر احتمال وقوع الحدث B.



مثال:

في تجرِبة رمي حجر نرد مرّة واحدة: ليكن الحدث A ظهور وجهٍ عددُ نقاطِه زوجي، وليكن الحدث B ظهور وجه عدد نقاطه مربع عدد صحيح، برهن أنّ A و B مستقلّان.

الحل:

$A=\{2,4,6\}$ يكون $p(A)=\frac{1}{2}$ (علّل)

$B=\{1,4\}$ يكون $p(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

ويكون $A\cap B=\{4\}$

مبرهنة (تُقبل من دون ذكر البرهان):

في الفضاء الاحتماليّ $(S,\mathcal{P}(S),p)$ إذا كان A و B حدثين مستقلّين فإنّ الحدثين A و B' مستقلّان (وكذلك B و A' مستقلّان).

نتيجة : إذا كان الحدثان A و B مستقلَّين، فإنّ الحدثين A' و B' مستقلّان.

ملاحظة:

نقبل بالاستقلال الاحتماليّ للأحداث المرتبطة بكلّ من التجارب الآتية:

1. الرمي على هدف أكثر من طلقة.
2. رمي حجر نرد أكثر من مرّة.
3. رمي قطعة نقود أكثر من مرّة.
4. السحب على التتالي مع الإعادة أكثر من مرّة.

مثال:

لدينا راميان يطلق كلٌّ منهما b , a طلقةً واحدة على هدف معيّن، فإذا كان احتمالُ أن يصيبَ الرامي a الهدف يساوي $\left(\frac{6}{10}\right)$ ، واحتمال أن يصيب الرامي b الهدف يساوي $\left(\frac{7}{10}\right)$:

1) ما احتمالُ أن يصيب الراميان الهدف معاً ؟

2) ما احتمالُ أن يصيب أحدهُما على الأقلّ الهدف؟

3) ما احتمالُ عدم إصابة الهدف؟

4) ما احتمالُ أن يصيب أحدُهما فقط الهدف؟

الحلّ:

نعتبرُ الحدث A أن يصيب الرامي a الهدف يكون $P(A)=\frac{6}{10}$

نعتبرُ الحدث B أن يصيب الرامي b الهدفَ يكون $P(B)=\frac{7}{10}$

1) احتمالُ أن يصيب كلٌّ منهما الهدف:

$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=\frac{6}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{42}{100}$$ (علّل)

2) احتمالُ أن يصيب أحدُهما على الأقلّ الهدف:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{7}{10}-\frac{42}{100}=\frac{88}{100}$$

3) نعتبرُ الحدث C عدم إصابة الهدف، فيكون:

$$p(C)=1-p(A\cup B)$$ (علّل)

$$=1-\frac{88}{100}=\frac{12}{100}$$

4) نعتبرُ الحدث D أن يصيبَ أحدُهما فقط الهدف، فيكون:

$$p(D)=p(A\cap B')+p(B\cap A')$$

$$=p(A)\,.\,p(B')+p(B)\,.\,p(A')$$ (علّل)

$$=\frac{6}{10}\,.\,\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\,.\,\frac{4}{10}=\frac{46}{100}$$

تمرينات ومسائل

1) صندوقان: A يحوي 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء.

B يحوي كرتين حمراوين و 6 كرات بيضاء.

نختار عشوائيّاً صندوقاً ونسحب عشوائيّاً منه كرة واحدة فقط:

- ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء ؟
- إذا علمت أن الكرة المسحوبة بيضاء **فما** احتمال أنها سُحبت من الصندوق A ؟

2) مغلف يحوي 9 بطاقات متماثلة مرقّمة من 1 إلى 9 نسحب عشوائيّاً بطاقتين معاً:

- إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين زوجيٌّ، فما احتمال أن تكون البطاقة ذات الرقم 2 من البطاقتين المسحوبتين ؟
- إذا كانت إحدى البطاقتين المسحوبتين تحمل الرقم 2 ، فما احتمال أن يكون مجموع رقمي هاتين البطاقتين فرديّاً ؟

3) صُنِعت قطعة نقود بحيث يكون احتمالُ ظهور الشّعار $P(H)$ يساوي $\frac{2}{3}$، واحتمال ظهور الكتابة $P(T)$ يساوي $\frac{1}{3}$ في الرّمية الواحدة، فإذا ظهر الشّعارُ نختار عشوائيّاً بطاقة من 7 بطاقات متماثلة مرقّمة من 1 إلى 7 ، وإذا ظهرت الكتابة نختار بطاقة من خمس بطاقات متماثلة مرقمة من 1 إلى 5، ما احتمال أن تكون البطاقة التي اختيرت ذات رقم زوجيٍّ؟

4) في تجربة إلقاء حجر نرد وقطعة نقود معاً مرة واحدة المطلوب:

1. اكتبْ فضاءَ العيّنة.
2. عيّن كلّاً من الأحداث الآتية ثمّ احسب احتماله:

A: ظهورُ الشعار مع عدد فرديّ.

B: ظهورُ عدد زوجيّ.

C: ظهورُ عدد أوّليّ.

5) أُلقي حجَرا نردٍ معاً مرّة واحدة:

1. ما احتمالُ أن يكون مجموعُ نقط الوجهين الظاهرين 5 أو 9؟

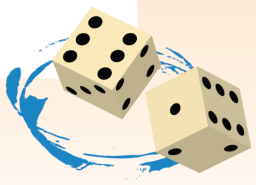
2. إذا كان مجموعُ نقط الوجهين الظاهرين زوجيّاً ، فما احتمالُ أن يكون هذا المجموع8 ؟

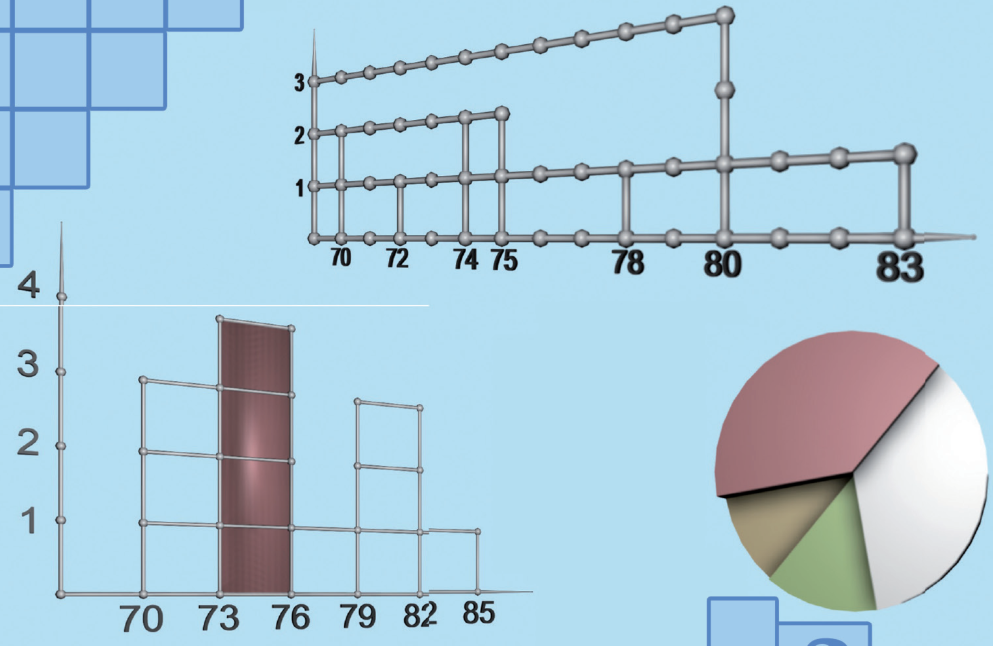
3. إذا كان مجموعُ نقط الوجهين الظاهرين 6 ، فما احتمالُ أن يكون عددُ نقط أحد الوجهين الظاهرين (فقط) يساوي 2 ؟

6) يحوي مغلّف 7 بطاقات متماثلة مرقّمة بالأرقام 3 , 2 , 1 , 1 , 0 , 0 , 0 (رقم لكلّ بطاقة)، نسحب عشوائيّاً من المغلّف 3 بطاقاتٍ معاً:

1. احسب احتمالَ أن يكون جداءُ أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة معدوماً.

2. إذا كان جداءُ أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة معدوماً، فما احتمال أن يكون مجموعُها غيرَ معدوم؟





3
الإحصاء

الإحصاء

سوف تتعلّم:

1) جدول التوزيع التكراري والتوزيع التكراري النسبي.

2) المتوسّط الحسابي – الوسيط – المنوال.

انطلاقةٌ نَشِطة:

لمعرفة مستوى طلاّب الصفّ الأوّل الثانوي بمادّة الرياضيّات في إحدى المدارس، دوّنّا الدرجاتِ التي حصل عليها أربعون طالباً في الامتحان النهائي فكانت على الشكل الآتي:

1	5	9	8	9	4	5	6
8	6	1	4	2	6	1	1
4	3	8	6	4	6	7	5
9	7	2	7	0	4	7	9
9	7	3	0	10	5	6	6

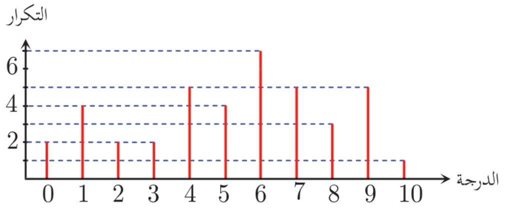
من الصعب استنباطُ معلوماتٍ مفيدة من القائمة السابقة؛ بسبب عدد المشاهدات الكبير نسبيّاً، ولكن نلاحظ أنّ معظم العلامات قد تكرّرت أكثر من مرّة، لذلك نعمد إلى ترتيبها في جدول نسمّيه جدول التوزيع التكراريّ، وفيه نقابل كلّ درجة بعدد مرّات ورودها أو تكرارها فنحصلُ على الجدول المختصر الآتي:

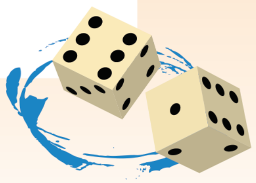
الدرجة	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
التكرار	2	4	2	2	5	4	7	5	3	5	1

فإذا تأمّلنا هذا الجدول فإنّنا نلاحظ بسهولة ما يأتي:

- تكرار الدرجة 7 هو 5 ، وهذا يعني أنّ خمسة طلاب قد نالوا هذه الدرجة.
- إنّ الدرجة الأكثر تكراراً هي 6 وقد حصل عليها 7 طلاب.
- نال طالبان درجة الصفر، في حين نال طالبٌ واحدٌ الدرجة التامّة.

ويمكن تمثيل الجدول السابق بيانياً بمخطّطٍ كما في الشكل الآتي:





وفيه نرى بوضوح أنّ القيمة الأكثرَ تكراراً تقابلُ العمود الأكثر ارتفاعاً، و نسمّي هذا المخطّط التمثيل البيانيّ بالأعمدة أو المخطّط ذا الأعمدة للمشاهدات.

إذا أردْنا موازنة هذه النتائج بنتائج مدرسة أخرى، فقد لا يعطي الجدول السابق المعلوماتِ اللّازمةَ للموازنة، لذا نلجأ تحقيقاً لهذا الغرض إلى جدول توزيع التكرار النسبي، وهو جدول يقابل كلّ قيمة بنسبةِ عدد مرّات ورودها أوتكرارها إلى العدد الإجماليّ، أي مجموع التكرارات كلّها، فالتكرار النسبيّ للعلامة 4 مثلاً هو $0.125 = \frac{5}{40}$ ، ونسمّي جداء ضرب التكرار النسبيّ لعلامة بـ 100 تكرارها النسبيّ المئويّ فيكون 12.5% هو التكرار النسبيّ المئويّ للدرجة 4، ونسمّي الجدول الذي يقرن بكلّ درجة تكرارها النسبي، جدولَ توزيع التكرارات النسبيّة لجملة القياسات، وهو في المثال السابق الجدول الآتي :

الدرجة	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
التكرار النسبي	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{40}$

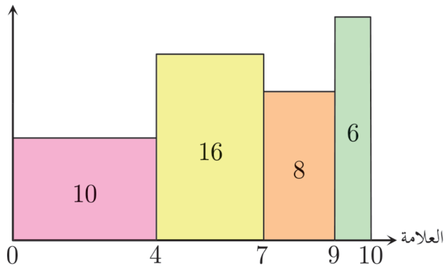
قد تتطلّب الدراسة الإحصائيّة أن تستبدل بالمعطيات السابقة معطياتٍ تختصرها، وتعبّر عنها بأسلوب أفضل، ففي المثال المدروس لا نهتمّ فعلاً بتفاصيل الدرجات، بل نهتمّ بتوزيعها إلى فئات (أو شرائح) تعطينا فكرةً عن عدد الطلاّب الضعفاء، والوسط، والجيّدين، والمتفوّقين، وذلك بأن نعرّف على سبيل المثال:

- فئة الطلاّب الضعفاء، وتشمل الطلاب الذين درجاتهم بين 0 و 3.
- فئة الطلاّب الوسط، وتشمل الطلاب الذين درجاتهم بين 4 و 6.
- فئة الطلاّب الجيّدين، وتشمل الطلاب الذين درجاتهم 7 أو 8.
- فئة الطلاّب المتفوّقين، وتشمل الطلاب الذين درجاتهم 9 أو 10.

وعندئذ يمكن التعبيرُ عمّا سبق من خلال الجدول الآتي الذي يقرن كلّ فئة بعدد الدرجات التي تنتمي إليها، وهو ما يُسمّى تكرار الفئة:

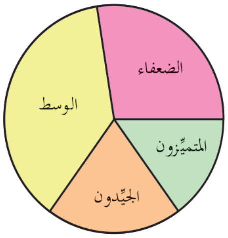
الفئة	$[0,4[$	$[4,7[$	$[7,9[$	$[9,10[$
تكرار الفئة	10	16	8	6

ويمكن أن نمثّل الجدول السابق بيانيّاً بمستطيلات كما في الشكل المجاور :



إذ يقابل كلَّ فئة مستطيلٌ قاعدته على محور الفواصل، وطوله يساوي طولَ الفئة، وارتفاعُه يتحدّد بحيث تكونُ مساحة المستطيل متناسبةً مع تكرار الفئة.

ويمكن تمثيل هذه المعطيات بمخطّط دائريّ، وهو مخطّط يقرن كلّ فئة بقطاع زاويّ في دائرة تكونُ زاويته بالدرجات مساويةً التكرار النسبيّ للفئة مضروباً بالعدد 360، والمخطّط المجاور هو المخطّط الدائريّ لجملة المشاهدات المصنّفة السابقة:



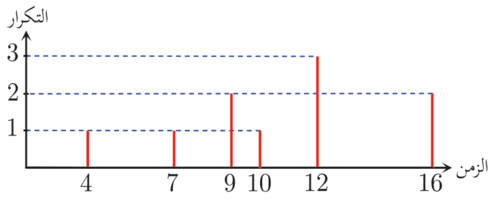
اختبر معلوماتِك:

لنفترض أنّ جملةَ القياسات : $12, 4, 16, 16, 10, 7, 9, 12, 9, 12$ تمثِّل الأزمنة التي استغرقها عشرة طلاّب في حلّ وظيفة الرياضيّات مُقاسةً بالدقائق.

- أكمل جدول توزيع التكرار لهذه الجملة :

الزمن	16	12	10	9	7	4
التكرار	...	3	...	2	...	1

- تأكّد من أنّ الرسم الآتي هو التمثيلُ البيانيُّ بالأعمدة لجملة القياسات السابقة:



• نصنّف القياساتِ السابقةَ في ثلاث فئات تبعاً لانتمائها إلى أحد المجالات الآتية: $0,8$ أو $8,12$ أو $12,20$. أكملْ جدول التكرار الآتي الموافق لهذا التصنيف :

الفئة	$[0,8[$	$[8,12[$	$[12,20[$
تكرار الفئة	2	$\cdots$	$\cdots$

• مثّل الجدولَ السابق بيانيّاً باستخدام المستطيلات.

• صنّف جدولَ الأزمنة السابقة في فئتين هما: $[0,10[, [10,20[$، ثمّ مثّل ذلك بيانياً. لاحظ أنّه في هذه الحالة للفئتين العرض نفسه، وهنا نقول: إنّنا نجري تصنيفاً في فئات بعرض قدره 10 لكلّ فئة.

ملاحظة

يُبنى المخطّط ذو الأعمدة لتوزيع التكرار النسبيّ بطريقة مماثلة تماماً لطريقة بناء مخطّط توزيع التكرار، وهنا يساوي ارتفاع كلّ عمود التكرارَ النسبيّ للقياس الموافق، وليس تكرارها.

❀✿❀❀✿❀

① المتوسّط الحسابيّ

1.1. تعريف ومثال

تعريف 1. المتوسّط الحسابيّ لعدد n a_1 و a_2 و ... و a_n هو العدد $\bar{a}$ المعرّف بالعلاقة:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

وهكذا يُحسب المتوسّط الحسابيّ لـ n عدد بتقسيم مجموعها S على n، أي : $\bar{a} = \frac{S}{n}$. ولمّا كانت الأعداد a_1 و a_2 و ... و a_n غير مختلفة بالضرورة، كان من المفيد أحياناً تجميع الأعداد المتساوية في العبارة السابقة، فتأخذ الصيغة الآتية:

$$\bar{a} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n}$$

بعد أن عرّفنا العددَ n_1 بأنّه عدد الأعداد التي تساوي x_1، و n_2 عدد الأعداد التي تساوي x_2 وهكذا.

فمثلاً المتوسّط الحسابيّ للأعداد العشرة الآتية: $12, 4, 16, 16, 10, 7, 9, 12, 9, 12$ هو

$$\frac{12+4+2\times 16+10+7+2\times 9+2\times 12}{10}=10.7$$

ملاحظة :

نرمز إلى المجموع $a_1+a_2+\dots+a_n$ بالرمز $\sum_{i=1}^{n} a_i$ ويُقرأ : مجموع a_i من $i=1$ إلى n.

مثال

يمثّل الجدول الآتي أطوال اللّاعبين في فريق كرة قدم :

الطول	1.70	1.72	1.75	1.80	1.98
التكرار	2	5	1	2	1

وعليه فإنّ قيمة المتوسّط الحسابيّ لأطوال اللّاعبين في هذا الفريق هي :

$$\overline{x}=\frac{2\times 1.70+5\times 1.72+1\times 1.75+2\times 1.80+1\times 1.98}{11}=\frac{19.33}{11}\approx 1.76$$

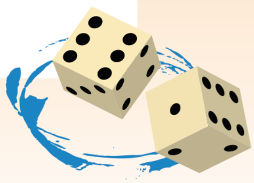
ونرى في هذا الفريق أنّ القيمة 1.98 قيمةٌ شاذّة، لذلك قد يكون من المفيد حساب المتوسّط الحسابيّ m لجملة هذه القياسات بعد حذف القيمة الشاذّة منها، أي :

$$m=\frac{2\times 1.70+5\times 1.72+1\times 1.75+2\times 1.80}{10}=\frac{17.35}{10}\approx 1.73$$

2.1. خاصّة الخطيّة:

مبرهنة 1. إذا كان $\overline{a}$ المتوسّط الحسابيّ للأعداد $a_n, \dots, a_2, a_1$ و كان $\overline{b}$ المتوسّط الحسابيّ للأعداد $b_n, \dots, b_2, b_1$ فإنّ $\overline{a}+\overline{b}$ هو المتوسّط الحسابيّ للأعداد

$$a_n+b_n, \dots, a_2+b_2, a_1+b_1$$



الإثبات :

في الحقيقة لدينا

$$m = \frac{a_1 + b_1 \ + \cdots + \ a_n + b_n}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

ومنه $m = \bar{a} + \bar{b}$ وهذا يثبت المطلوب.

مبرهنة 2. إذا كان k عدداً حقيقيّاً ما و $\bar{a}$ المتوسّط الحسابيّ للأعداد $a_n, \ldots, a_2, a_1$ فإنّ $\bar{a} + k$ هو المتوسّط الحسابيّ للأعداد: $a_n + k, \ldots, a_2 + k, a_1 + k$.

الإثبات

إذا كان كلٌّ من الأعداد $b_n, \ldots, b_2, b_1$ مساوياً k في المبرهنة السابقة كان $\bar{b} = \frac{nk}{n} = k$ ومنه النتيجة المطلوبة.

مبرهنة 3. إذا كان λ عدداً حقيقيّاً ما و $\bar{a}$ المتوسّط الحسابيّ للأعداد $a_n, \ldots, a_2, a_1$ فإنّ $m = \lambda \bar{a}$ هو المتوسّط الحسابيّ للأعداد: $\lambda a_n, \ldots, \lambda a_2, \lambda a_1$.

الإثبات

في الحقيقة لدينا:

$$m = \frac{\lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda a_n}{n} = \frac{\lambda \ \ a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lambda \bar{a}$$

ومنه $m = \lambda \bar{a}$ وهذا يُثبت المطلوب.

تكريساً للفهم

- **لماذا الاهتمام بالمتوسّط الحسابيّ ؟**

لأنّه عندما تتضمّن جملة المشاهدات قدراً كبيراً من المعلومات، فإنّنا نسعى إلى تلخيصها قدرَ الإمكان بالاستعانة ببعض الأعداد المعبّرة، ونسمّيها مُعاملات، والمتوسّط الحسابيّ هو أحدُ هذه المعاملات، وعندما لا

تكون قيم المشاهدات مبعثرة، يعبِّر المتوسّط الحسابيّ بوجهٍ عام بأسلوب جيد عن هذه الجملة، أمّا عندما تكون قيم المشاهدات مبعثرةً فلا يمثِّل المتوسِّط الحسابيّ مؤشِّراً مفيداً.

مثال:

هطل في العام الماضي 229 ملم من الأمطار في مدينة دمشق، وهذا يعطي وسطيّاً $0.6 \approx \frac{229}{365}$ ملم في اليوم الواحد، لكنّ هذه المقولة غير معبّرة على الإطلاق، ولاسيمّا أنّها لم تمطر في كثير من الأيّام، إذن علينا التمعّن في طبيعة المعلومات قبل الحكم عليها، ويمكن أن نرتكب أخطاءً إذا لم نفعل ذلك.

مثال:

لنتأمّلْ درجات 22 طالباً، ولنفترض أنّ المتوسّط الحسابيّ لدرجاتهم من 20 في امتحان ما هو 10، فإنّ الاستنتاج أنّ نصفَ الطلاب قد نجح، والنصفَ الآخر قد رسب، بعيدٌ عن الحقيقة في حالات كثيرة. فقد ينال اثنان منهم 20 درجة، وكلٌّ واحد من الباقين 9 درجات، وفي هذه الحالة ينجحُ اثنان فقط، هذا لأنّ علامتي هذين الطالبين استثنائيّتان أو شاذّتان.

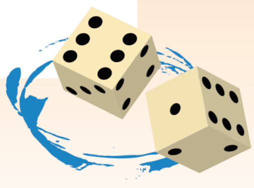
- **كيف نحسبُ المتوسّط الحسابيّ عندما نصنّف جملةَ قياسات أو مشاهدات في فئات ؟**

لا نعرف في بعض الأحيان كلَّ قيمة من القياسات a_i. ولكن قد يتوافر لدينا معلوماتٌ عن الفئات : مخطّطٌ ذو أعمدة مثلاً، عندئذ إذا كان توزّع القياسات a_i منتظماً داخل كلّ فئة، يمكننا الحصول على قيمة تقريبيّة للمتوسّط الحسابيّ بأنّ نستبدل بكلّ فئة عدد عناصرها n_i قيمةَ منتصف الفئة مكرّراً n_i مرّة.

تمرين محلول 1. كيف نستفيد من الخاصّة الخطّيّة للمتوسّط الحسابي؟

احسب m المتوسّط الحسابيّ للأعداد الثمانية عشر الآتية :

152410	152400	152405	152401	152403	152402
152406	152404	152401	152402	152402	152409
152403	152400	152402	152404	152408	152401



الحلّ:

يمكننا حساب m مباشرةً باستعمال الآلة الحاسبة، ولكن من المناسب أن نلاحظ أنّ الأعدادَ السابقةَ كلّها محصورةٌ بين 152400 و 152410، ثُمّ نستفيد من المبرهنة 2. في الحقيقة لدينا

$152400 + 2 = 152402$ و $152400 + 3 = 152403$ وهكذا...

فهذه الأعداد جميعُها من الشكل $152400 + b_i$. والمتوسّط الحسابيّ للأعداد

$$2, 3, 1, 5, 0, 10, 9, 2, 2, 1, 4, 6, 1, 8, 4, 2, 0, 3$$

هو $\frac{63}{18} = 3.5$، إذن نجدُ استناداً إلى المبرهنة 2، بعد أخذ $k = 152400$، أنّ

$$m = 152400 + 3.5 = 152403.5$$

ملاحظة

عند استعمال الآلة الحاسبة يمكن أن نرتكبَ أغلاطاً و لاسيمّا عند إدخال المعطيات، أمّا خاصّة الخطّيّة فقد أفادتنا في استبدال 17 عدداً من رقم واحد وعدداً واحداً مكوّناً من رقمين بثمانيةَ عشرَ عدداً، كلٌّ منها مكوّن من ستّة أرقام، بل ويمكنُنا حساب المتوسّط الحسابيّ المطلوب ذهنيّاً بهذه الطريقة.

② طرائق حساب المتوسّط الحسابيّ

1.2. الحساب انطلاقاً من المتوسّطات الحسابيّة لمجموعات جزئيّة:

مثال:

المتوسّط الحسابيّ m_1 لدرجات الطلاّب الذكور في صفٍّ، وعددهم 20 طالباً، في مادّة الكيمياء هو 11.5 من 20، والمتوسّط الحسابيّ m_2 لعلامات الطالبات، وعددهن 10 طالبات، في الصف نفسه، وفي المادّة نفسها يساوي 12.5 من 20. سنرى فيما يأتي كيفَ يمكننا انطلاقاً من هذه المعلومات حسابَ المتوسّط الحسابيّ m لدرجات طلاّب الصفّ في مادّة الكيمياء.

مبرهنة 4. لنجزّئ N عدداً $a_N,\dots,a_2,a_1$ إلى جزأيْن منفصلين، الأوّل يحوي p عدداً، ويحوي الآخر q عدداً. إذا كان m_1 المتوسّط الحسابيّ للجزء الأوّل، وكان m_2 المتوسّط الحسابيّ للجزء الثاني، ورمزنا بالرمز m إلى المتوسّط الحسابيّ للأعداد $a_N,\dots,a_2,a_1$ كان :

$$m = \frac{p}{N}m_1 + \frac{q}{N}m_2 .$$

الإثبات

ليكن $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$، وليكن S_1 مجموع أعداد الجزء الأول و S_2 مجموع أعداد الجزء الثاني. لمّا كان الجزءان منفصلين كان $S = S_1 + S_2$ و $m = \frac{S}{N} = \frac{S_1 + S_2}{N}$.

ولكن $m_1 = \frac{S_1}{p}$ و $m_2 = \frac{S_2}{q}$، وعليه $S_1 = pm_1$ و $S_2 = qm_2$ ، ومن ثَمّ

$$m = \frac{pm_1}{N} + \frac{qm_2}{N} = \frac{p}{N}m_1 + \frac{q}{N}m_2$$

وهذا يثبت المطلوب.

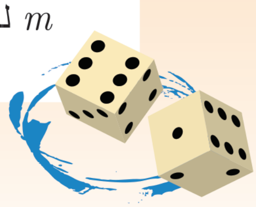
مثال -تابع-

في المثال السابق : $N = 30$، $p = 20$، $q = 10$، $m_1 = 11.5$ و $m_2 = 12.5$. ومنه نجد أنّ

$$m = \frac{p}{N}m_1 + \frac{q}{N}m_2 = \frac{20}{30}\times 11.5 + \frac{10}{30}\times 12.5 \approx 11.8$$

يمكننا بأسلوب مماثل إثبات النتيجة الأعمّ الآتية :

مبرهنة 5. لنجزّئ N عدداً $a_N,\dots,a_2,a_1$ إلى أجزاء منفصلة مثنى مثنى عدَدُها k، الجزء الأول يحوي N_1 عدداً، متوسّطها الحسابيّ m_1، والجزء الثاني يحوي N_2 عدداً، متوسّطها الحسابيّ m_2، هكذا ... يحوي الجزء الأخير N_k عدداً، متوسّطها الحسابي m_k، عندئذ يُحسب المتوسّط الحسابيّ m للأعداد $a_N,\dots,a_2,a_1$ بالعلاقة : $m = \frac{N_1}{N}m_1 + \frac{N_2}{N}m_2 + \cdots + \frac{N_k}{N}m_k$



2.2. الحسابُ انطلاقاً من جدول التكرار النسبيّ:

مبرهنة 6. لنرمز بالرمز $\overline{x}$ إلى المتوسّط الحسابي لجملة القياسات المبيَّنة في الجدول أدناه :

القيمة	x_1	x_2	$\cdots$	x_p
التكرار	n_1	n_2	$\cdots$	n_p
التكرار النسبيّ	f_1	f_2	$\cdots$	f_p

عندئذ يكون : $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_px_p$.

الإثبات

لنعرّف $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$. لدينا من التعريف

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$$

إذن

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1}{N} + \frac{n_2x_2}{N} + \cdots + \frac{n_px_p}{N} = \frac{n_1}{N}x_1 + \frac{n_2}{N}x_2 + \cdots + \frac{n_p}{N}x_p$$

ومنه $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_px_p$، لأنّ $f_k = \frac{n_k}{N}$، وهذا يُثبّتُ المطلوب.

تكريساً للفهم

- تفيد المبرهنة 6 في حساب المتوسّط الحسابيّ من دون معرفة تكرار كلٍّ من قياسات الجملة، إذ تكفي معرفة التكرار النسبي لهذه القيم.
- بناءً على التعريف لحساب المتوسّط الحسابيّ لجملة قياسات، لا يلزم إلاّ معرفة مجموع هذه القياسات، ولا نحتاج إلى هذه القيم بعينها.

تمرينٌ محلول 2. حساب المتوسّط الحسابيّ انطلاقاً من المتوسّطات الحسابيّة لأجزاء منفصلة من جملة القياسات.

يلتقي فريقان رياضيّان كلٌّ منهما مؤلّف من 20 رياضياً. المتوسّط الحسابيّ للزمن اللّازم لقطع مسافة 100 متر لدى الفريق الأول هو 11 ثانية، أما لدى الفريق الثاني فيساوي 12 ثانيةْ .

1. نكوّن فريقاً جديداً يضمّ جميع رياضيِّي الفريقين، كم يبلغُ المتوسّط الحسابيّ m للزمن اللازم ليقطع الفريق الجديد مسافة 100 متر ؟
2. يلتحق بالفريق الجديد فريق ثالث مكوَّن من 10 رياضيين يقطعون مسافة 100 متر بزمن وسطي قدره 13 ثانية. كم يبلغ m' المتوسّط الحسابيّ للزمن اللّازم لفريق مكونّ من 50 رياضياً، ليقطع مسافة 100 متر؟

الحل

1. نطبّق المبرهنة 4 . إذ لدينا $N_1 = 20$ ، $N_2 = 20$ ، $N = 40$ ، $m_1 = 11$ و $m_2 = 12$. ومنه :

$$m = \frac{20}{40} \times 11 + \frac{20}{40} \times 12 = 11.5$$

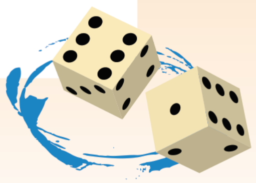
2. نطبّق المبرهنة 5. بوضع $N_3 = 10$ ، $m_3 = 13$ ، $N = 50$ و $k = 3$ ، فنجد :

$$m' = \frac{20}{50} \times 11 + \frac{20}{50} \times 12 + \frac{10}{50} \times 13 = 11.8$$

كما يمكننا أيضاً حساب m' وذلك بتأمل جزأيْن : الأوّل مؤلّف من 40 لاعباً ومتوسّطه الحسابي 11.5 ثانية، والثاني مؤلّف من عشرة لاعبين ومتوسّطه الحسابي 13 ثانية.

تمرين محلول 3. حسابُ المتوسّط الحسابيّ انطلاقاً من معرفة التكرارات النسبيّة.

حصل 20% من الطلاب في أحد الصفوف على 15 درجة من 20 في وظيفة الرياضيّات، وحصل 50% منهم على 10 درجات، وحصل 30% منهم على 8 درجات، ما المتوسّط الحسابيّ لعلامات طلّاب الصفّ؟



الحل

نستفيد من المبرهنة 6 بعد أن نضع : $x_1 = 15$ و $x_2 = 10$ و $x_3 = 8$ و $f_1 = 0.2$ و $f_2 = 0.5$ و $f_3 = 0.3$ وبذلك يُعطى المتوسّط الحسابيّ m بالعلاقة :

$$m = 0.3 \times 8 + 0.5 \times 10 + 0.2 \times 15 = 10.4$$

ملاحظة

لا نعرف في هذه الحالة عددَ الطلاّب، ولا نعرف عدد الذين حصلوا على 15 درجة، أو حصلوا على عشر درجات، أو أولئك الذين حصلوا على ثماني درجات.

❀✿❀❀✿❀

③ الوسيط

1.3. أمثلة

- تمثّل الأعداد $10, 12, 3, 2, 5$ أعمارَ خمسة إخوة في أسرة، فإذا رتّبناها من اليمين إلى اليسار تصاعدياً : $12, 10, \underline{5}, 3, 2$ لاحظنا أنّ عدد الإخوة الذين تزيد أعمارهم عن 5 يساوي عدد أولئك الذين تقلّ أعمارهم عن 5، في مثل هذه الحالة نقول إنّ 5، هو وسيط جملة المشاهدات $10, 12, 3, 2, 5$.
- لنتأمّل جملة القياسات $10, 12, 3, 2, 5, 14$، فإذا رتّبناها بدءاً من اليمين تصاعديّاً : $14, 12, 10, 5, 3, 2$ لاحظنا أنّ ثلاثةً من قياسات الجملة : $5, 3, 2$، أقلُّ من 6 وثلاثة منها: $14, 12, 10$ أكبر من العدد 6. وتبقى هذه الخاصّة صحيحة إذا استبدلنا بأيّ عدد من المجال $]5, 10[$ العدد 6، في مثل هذه الحالة نسمّي منتصف المجال $[5, 10]$، أيّ العدد 7.5، وسيط جملة القياسات $10, 12, 3, 2, 5, 14$، ويمكننا أن نقول: إنّ المجال $[5, 10]$ هو مجال وسيط بالنسبة إلى جملة القياسات : $10, 12, 3, 2, 5, 14$.

ملاحظات

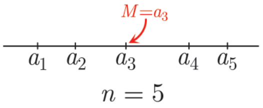
- يبيّن المثال السابق أنّه يمكن ألاّ يكون وسيط جملة قياسات قيمة من قيمها.
- قد يكون المجال الوسيط من الشكل $[a, a]$، في هذه الحالة يكون الوسيط هو a كما هي الحال في جملة المشاهدات $15, 12, 12, 2$، المجال الوسيط هنا هو $[12, 12]$ والوسيط هو 12.

2.3. وسيطُ جملة قياسات

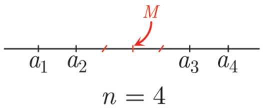
تعريف 2. عندما تُعطى جملة قياسات على هيئة قائمة من n قياساً، فإنّ وسيطها هو العدد M الذي نحصل عليه بالطريقة الآتية:

❶ نرتّب قيم الجملة تصاعديّاً بحيث تظهر كلّ قيمة عدداً من المرّات مساوياً لتكرارها، فنحصل على مايأتي: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.

❷ إذا كان n عدداً فرديّاً من الشكل $2m-1$، كان M هو العدد a_i الموجود في وسط هذه المتتالية، أي الموافق للقيمة $i = m$.



❸ إذا كان n عدداً زوجيّاً من الشكل $2m$، كان M منتصف المجال الوسيط وهو المجال $[a_m, a_{m+1}]$.



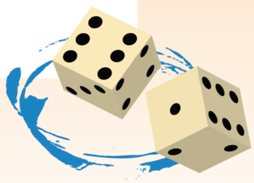
$[a_2, a_3]$ هو المجال الوسيط.

مثال

لنتأمّل جملة القياسات الممثَّلة بجدول التكرار الآتي :

القيمة	50	45	30	60	61
التكرار	2	3	2	2	1

نرتِّب تصاعديّاً هذه القيم، بحيث تظهر كلُّ قيمة عدداً من المرّات مساوياً تكرارَها، فنحصل على ما يأتي : $30, 30, 45, 45, 45, 50, 50, 60, 60, 61$، العدد n هنا يساوي 10 فهو عددٌ زوجيٌّ. إذن وسيط هذه الجملة من القياسات هو منتصف المجال الوسيط، أي المجال المحدود بالقيمتين الخامسة والسادسة، وهو $[45, 50]$ أي أنّ الوسيط هو $M = 47.5$.



تكريساً للفهم

- **لماذا الاهتمام بالوسيط؟**
  - يُعبِّر الوسيط، كما المتوسط الحسابيّ، عن خواص جملة قياسات، وهو حدسيّاً العدد الذي يجزِّئ الجملة المدروسة إلى جزأيْن يحوي كلٌّ منهما العددَ نفسَه من العناصر.

مثال

إذا كنّا ندرس رواتب العاملين في شركة مثلاً، فإنّ معرفة المتوسّط الحسابي للرواتب لا يعطي أية فكرة عن توزّعها، أمّا إذا علمنا وسيط هذه الرواتب وليكن 000 80 ل.س سنويّاً، استنتجنا أنّ دَخْل 50% من العاملين يزيد على 000 80 ل.س سنويّاً، وأنّ دَخْل الباقين أقلّ من ذلك. هذا ويمكننا تجزئة الجملة المدروسة إلى أكثر من جزأيْن كأن نقول إنّ دَخْل 30% من العاملين يزيد على 000 90 ل.س سنوياً، دَخْل 30% منهم أقلّ من 000 60 ل.س سنويّاً، وأنّ الدَخْل السنوي للباقين يقع بين هاتين القيمتين.

- لاحظ أنّ الوسيط لا يتعلّق إلاّ بترتيب المشاهدات من دونِ قيمِها، وأنّه لا يتغيّر بحذف القيم المتطرّفة، أي أصغر قيمة وأكبر قيمة مهما كانت هذه القيم، وهذه الخاصّة لايحقّقها المتوسّط الحسابيّ بوجه عام.

فمثلاً : للعيِّنتين : **1**,9,10,11,13,14,**32** و 9,10,11,13,14 الوسيط نفسه.

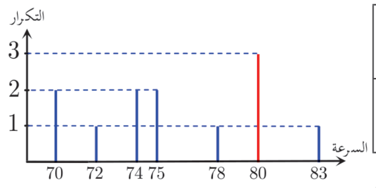
④ المنوال والفئة المنواليّة والمدى

1.4. المنوال

مثال

سجّلنا في الجدول الآتي سرعات اثنتي عشرة سيّارة على الطريق العام :

السرعة	70	72	74	75	78	80	83
التكرار	2	1	2	2	1	3	1



لاحظ أنّ السرعة 80 هي الأكثر تكراراً في الجدول السابق، نقول إنّ القيمة 80 هي منوال هذه الجملة من القياسات.

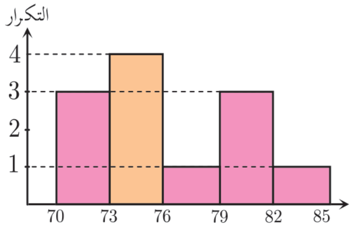
تعريف 3. منوال جملة قياسات أو مشاهدات هو القيمة الأكثر تكراراً بين قيمها. لاحظ أنّه قد يكون لجملة قياسات أكثر من منوال واحد.

2.4. الفئة المنوالية

مثال

لنتأمّل جملة القياسات السابقة، ولنصنّف السرعات المُسجّلة في فئات طول كلٍّ منها 3:

الفئة	$[70,73[$	$[73,76[$	$[76,79[$	$[79,82[$	$[82,85[$
التكرار	3	4	1	3	1



نلاحظ هنا أنّ الفئة ذات التكرار الأكبر هي $]73,76[$. نقول: إنّ الفئة $]73,76[$ هي الفئة المنواليّة لجملة القياسات هذه، كما نلاحظ أنّ منوال الجملة لا ينتمي في هذه الحالة إلى الفئة المنواليّة.

تعريف 4. الفئة المنواليّة لجملة قياسات هي الفئة الأكثر تكراراً بين فئات هذه الجملة.

3.4. المدى

مثال

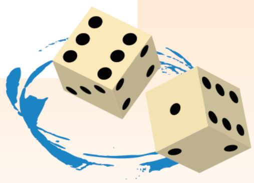
لنتأمّل جملة القياسات المشار إليها في المثال السابق. نسمّي مدى هذه الجملة الفرقَ بين أكبر قيمِها وأصغر تلك القيم، أي 13.

تعريف 5: مدى جملة من القياسات أو المشاهدات هو الفرقُ بين أكبر قيمة وأصغر قيمة فيها.

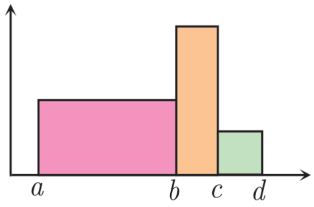
تكريساً للفهم

- **لماذا الاهتمام بالمنوال ؟**

لأنّه في حالات عدّة يهمّنا معرفةُ القيم الأكثر تكراراً، كما هي حال الانتخابات مثلاً.



- **كيف نجد الفئة المنواليّة انطلاقاً من مخطّط التكرارات الفئوي ؟**
  - هي الفئة الموافقة لأكبر المستطيلات مساحةً، لأنّها الفئة الأكثر تكراراً.
  - عندما تكون الفئات من طول واحد، فإنّ الفئة المنواليّة تقابل المستطيل الأكثر ارتفاعاً، وهذا غير صحيح في الحالة العامّة، فالفئة المنواليّة للجملة المصنّفة المعطاة بالمخطّط المجاور هي $[b,c[$ وليس $[a,b[$.



- **لماذا الاهتمام بالمدى ؟**

لأنّ المدى يعطي فكرةً عن تبعثُر جملة قياسات أو تشتُّتها، أمّا المتوسّط الحسابي والوسط والمنوال فهي لاتعطي معلوماتٍ من هذا النوع.

مثال

إذا تأمّلنا العيّنتين A : $20,10,10,0$ و B : $11,10,10,9$ لاحظنا أنّ لهما المتوسّطَ الحسابيّ، والوسيطَ والمنوالَ نفسها وهو 10، ولكنّ قيم الجملة الأولى، متباعدة بينما تتجمّع قيم الثانية حول 10. يعبّر المدى بالتحديد عن هذه الحالة، فبينما يساوي 20 في الأولى نجده يساوي 2 في الثانية، فنقول إنّ B ذات تشتّت ضعيف و A ذات تشتّت كبير.

تمرين محلول 5: كيف نحدّد المنوال والفئة المنواليّة والمدى لجملة قياسات؟

سألنا 35 طالباً عن عدد المرّات التي ارتادوا فيها مكتبة المدرسة في السنة الماضية، فكانت الإجابات على الوجه الآتي:

2	7	7	4	5	7	10	5	5	11	1	2	5	5	4	4	4	7
1	4	4	5	7	7	1	4	5	5	7	7	4	7	7	4	4	

1. عيّنْ منوالَ (أو منوالاتِ) هذه الجملة.
2. ما مدى هذه الجملة من القياسات؟
3. صنّف المُعطيات السابقة في فئات طولها 3. ما الفئة المنواليّة لهذه الجملة من القياسات؟

الحل

1. لتعيين المنوالات نبدأ بملء جدول التكرارات :

عدد مرّات ارتياد المكتبة	1	2	4	5	7	10	11
التكرار	3	2	10	8	10	1	1

فنجد أنّ 4 و 7 هما منوالا هذه الجملة من القياسات.

2. مدى الجملة هو الفرق بين القيمة الأعلى والقيمة الأدنى فيها، أي : $11-1=10$.

3. أمّا إذا تأمّلنا الجدول التكراري الفئوي :

الفئة	$[0,3[$	$[3,6[$	$[6,9[$	$[9,12[$
التكرار	5	18	10	2

فنجد أنّ الفئة المنواليّة هي المجال $[3,6[$.

تمرينات ومسائل

1. نتأمّل جملةَ قياسات جدول توزيعها التكراري هو الآتي :

القيمة	38	60	45.1	40	51.5
التكرار	8	2	8	7	5

نرمز بالرمز m إلى المتوسّط الحسابيّ لهذه الجملة. بيِّن الصحيح من الغلط في كلٍّ من القضايا الآتية:

♣ المتوسّط الحسابي يحقّق:

① $m = \frac{51.5+40+45.1+60+38}{5}$. ② $38 < m < 60$. ③ $m \approx 43.53$.

♣ منوال هذه الجملة يساوي:

① 45.1 . ② 60 . ③ 38 .

♣ إذا كان m' هو المتوسّط الحسابيّ لهذه الجملة بعد حذف القيمة 60 منها كان :

① $m' < m$. ② $m' \geq 38$. ③ $m' = 42.94$.

♣ إذا أضفنا 5 إلى جملة القياسات كافّة فإنّ المتوسّط الحسابيّ للجملة الناتجة هو:

① $m + 5$. ② $5m$. ③ 50 .

♣ إذا ضربْنا بالعدد 2 القياسات كافّة، فإنّ المتوسّط الحسابيّ للجملة الناتجة هو:

① $m + 2$. ② $2m$. ③ 86 .

♣ إنّ وسيط جملة القياسات هذه هو :

① 45.1 . ② 40 . ③ $\frac{40 + 45.1}{2}$.

2. فيما يأتي أطوال 30 تلميذاً بالسنتيمتر :

162,158,169,165,157,170,171,175,179,179
163,165,168,173,176,159,160,162,166,165
168,173,176,158,169,165,157,170,171,175

1. انقل وأكمل الجدول الآتي حيثُ طولُ كلّ فئة من الفئات 5cm :

الفئة	$[155,160[$	$[160,165[$	...
التكرار	5	...	...

2. ما منوال جملة القياسات المُصنَّفة أعلاه ؟

3. مثّلِ الجدولَ السابق بيانياً باستخدام المستطيلات.

3. ألقينا نرداً بستّة وجوه 50 مرّةً فكانت النتائج على الوجه الآتي:

2 6 6 5 4 4 4 2 1 1 6 5 3 5 2 6 1 1 4 6 3 2 1 1 6

3 4 3 2 2 1 4 2 2 1 3 5 5 4 5 2 3 1 3 4 5 5 6 6 4

1. انقل وأكمل الجدول الآتي حيث :

النتيجة	1	2	3	4	5	6
التكرار						
التكرار النسبي						

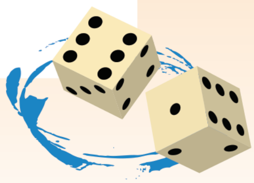
2. ما مجموع التكرارات النسبيّة؟

3. ارسم المخطَّط ذا الأعمدة للتكرارات النسبيّة.

4. احسبِ المتوسّطَ الحسابيّ m والوسيط M والمنوال (أو المنوالات) والمدى E لكلّ من الجملتين الآتيين من القياسات :

القياس	170	160	165	166
التكرار	1	1	1	2

القياس	75	82	72	79
التكرار	5	3	2	5



5. هات مثالاً عن جملة قياسات مؤلّفة من 5 عناصرَ متوسّطها الحسابيّ 12 ومداها 10.

6. أعطِ مثالاً عن جملة قياسات مؤلّفة من 5 عناصرَ متوسّطها الحسابيّ يساوي وسيطَها.

7. ابدأ بحساب المتوسّط الحسابيّ للأعداد الستّة الآتية : $189, 370, 127, 433, 156, 238$، ثُمّ استنتجِ المتوسّطَ الحسابيّ للأعداد الستة الآتية :

$$x_1 = 0.00432567189, \quad x_2 = 0.00432567370$$
$$x_3 = 0.00432567127, \quad x_4 = 0.00432567433$$
$$x_5 = 0.00432567156, \quad x_6 = 0.00432567238$$

8. ليكن m المتوسّط الحسابيّ للأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1. نضيف واحداً إلى كلّ عدد من هذه الأعداد، ثُمّ نضرب الناتج بالعدد 2. ما المتوسّط الحسابيّ للجملة الجديدة ؟
2. نضرب كلّ عدد من هذه الأعداد بالعدد 2، ثُمّ نضيف 1 إلى الناتج. ما المتوسّط الحسابيّ للجملة الجديدة ؟

9.

1. احسب المتوسّط الحسابي للأعداد $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$، ثُم احسب المتوسّط الحسابي للأعداد $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2$.
2. أيساوي المتوسّط الحسابيّ لمربّعات القيم مربّع متوسطها الحسابي؟

10. يتألّف الصّفُ العاشر في إحدى الثانويات من أربع شعب. يبلغ عددُ طلّابها 30 و 32 و 28 و 27 بالترتيب، أمّا المتوسط الحسابي لدرجات الفيزياء في كلٍّ من هذه الشعب فهو بالترتيب 12 و 11 و 13 و 14 (من عشرين درجة). ما المتوسّط الحسابيّ لدرجات الفيزياء في هذا الصف؟

11. يبلغ المتوسط الحسابي لأطوال طلّاب أحد الصفوف، وعددهم 35 طالباً، 1.7 متراً. نفترض أنّ عددَ الذكور منهم 15 طالباً متوسّط أطوالهم 1.8متراً. ما متوسّط أطوال الإناث في هذا الصّف؟

12. في إحدى المدن، نسبة العائلات التي عندها طفل واحد 20%، ونسبة تلك التي لديها طفلان 40% ونسبة تلك التي لديها ثلاثة أطفال 25%، ونسبة تلك التي لديها أربعة أطفال 10%، أمّا العائلات التي لديها خمسة أطفال فنسبتها 5%. ما متوسّط عدد الأطفال للعائلة في هذه المدينة؟

13. احسبِ المتوسّطَ الحسابيّ للجملتين الآتيين من القياسات :

القياس	15	20	12	30	25
التكرار النسبي	0.2	0.3	0.1	0.05	0.35

القياس	4	18	8	12
التكرار النسبي	0.4	0.4	0.1	0.1

14. في أحد الصفوف، يشاهدُ الطلاب التلفاز وسطيّاً ستّ مرّات أسبوعيّاً، 10% منهم يشاهدونه مرّة واحدة أسبوعياً، و 40% يشاهدونه أربعَ مرّات أسبوعياً، و 30% يشاهدونه سبع مرّات أسبوعياً، والباقون يشاهدونه n مرّة أسبوعيّاً. احسب n.

15. المتوسّط الحسابيّ لرواتب العاملين في شركتين A و B مبيَّن في الجدول الآتي وذلك تبعاً لجنسهم :

	A	B
ذكور	1400	1500
إناث	1000	1100

50% من موظّفي الشركة A ذكور و 20% من موظفي الشركة B ذكور. احسب المتوسط الحسابي لرواتب العاملين في كلٍّ من الشركتين. ماذا تلاحظ ؟

16. يُصنّف الموظّفون في شركتين E_1 و E_2 إلى فئتين : عمّال وأطر، وتُصنَّف كلُّ فئة إلى شرائحَ تبعاً للراتب الشهري S مُقاساً بآلاف الليرات. نبيّن في الجدول الآتي التكرار النسبيَّ لهذه الشرائح:

الشركة E_1	$5 \leq S < 10$	$10 \leq S < 15$	$15 \leq S < 20$
عمّال	57%	33%	0%
أطر	0%	4%	6%
الشركة E_2	$5 \leq S < 10$	$10 \leq S < 15$	$15 \leq S < 20$
عمّال	56%	28%	0%
أطر	0%	8%	8%

نفترض أنّ التوزّع منتظم في كلّ فئة، لحساب المتوسّط الحسابي نستبدل بكلّ فئة منتصفها.

1. لنرمز بالرمز M_1 إلى متوسّط رواتب موظّفي الشركة E_1 وبالرمز m_1 إلى متوسّط رواتب العمّال وبالرمز m_1' إلى متوسّط رواتب الأطر في هذه الشركة.

a. احسب M_1.

b. اشرح لماذا تقعُ رواتب 63% تقريباً من العمّال في الشركة E_1 في المجال $5,10$ و 37% منهم تقريباً في المجال $10,15$. ثمّ استنتج m_1.

c. احسب بأسلوب مماثل m_1'.

2. لنرمز بالرمّز M_2 إلى متوسّط رواتب موظّفي الشركة E_2 ، وبالرمز m_2 إلى متوسّط رواتب العمّال وبالرمز m_2' إلى متوسط رواتب الأطر في هذه الشركة. احسب M_2 و m_2 و m_2'.

3. يقول مدير E_2 لمدير E_1 : " رواتب الموظفين عندي أفضل من رواتب موظفيك"، فيجيب الآخر: "هذا غيرُ منصفٍ فرواتب عمّالي أفضل وكذلك رواتب أُطري". اشرح ذلك.

17. توثّق من صحة كلام المتحدّث في ما يأتي :

1. "حصلتُ على ثماني درجات من 20 في مذاكرة الرياضيّات، فغضب منّي والدي علماً أنّنا عشرة طلاب في الصفّ: حصل واحد منّا على 19 درجة، وواحد على 10 درجات، وأربعة على 9 درجات، وواحد على ثماني درجات هو أنا، وثلاثة على درجتين، فدرجتي فوق المتوسّط".

2. "مرةً أخرى أحصل على ثماني درجات، ولكن هذه المرة كانت الدرجات على الوجه الآتي : $19,18,9,9,8,7,5,4,3,2$. كيف أسوّغ درجتي ؟ سأقول إنني في النصف الأفضل من الصفّ".

3. "مرةً ثالثة حصلت على ثماني درجات، وهذه المرّة كانت العلامات على الوجه الآتي : $19,18,12,11,10,8,7,7,7,2$. فأنا أفضل من منوال الصفّ".

18. السعة الحيويّة هي حجم الهواء الأقصى الذي يحرّكهُ الإنسانُ عندما يشهقُ شهقةً واحدةً. أجرينا قياساً للسعة الحيويّة لجماعة مكوّنة من 17 شخصاً، فكانت النتائج مقاسة باللّيتر على الوجه الآتي:

3.9	4.1	4.15	4.3	4.3	4.5	4.6	4.65	4.7
4.7	4.8	4.85	4.95	5.05	5.2	5.5	5.7	

1. مثّل النتيجةَ السابقة بمخطّط ذي أعمدة.
2. احسبِ المتوسّط الحسابي، ثمّ احسب وسيط هذه الجملة من القياسات و مداها .
3. إذا علمتَ أنّ هناك علاقةً تعبّر عن السعة الحيويّة C مقاسة بالسنتيمتر المكعَّب بدلالة العمر g مقاساً بالسنوات، والطول t مقاساً بالسنتيمتر هي كما يأتي : $C = H + Pg\ t$، مع $H = 27.63$ و $P = -0.112$، فإذا علمت أنّ أعمار الجماعة السابقة تقع بين 19 و 23 سنة وأنّ أطوالَهم محصورة بين 169cm و 173cm.
   - فاحسبْ أكبر وأصغر قيمةً يمكن أن تجدها في جملة القياسات السابقة.
   - فهل تتّفق قيمة المتوسّط مع نتيجة السؤال السابق؟